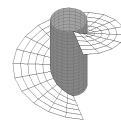




UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

<http://www.mat.ufpb.br/sergio>



3ª Prova

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.: Sérgio Data: 07/Out/2003

Turno: Manhã

Curso: Nome:

Período: 03.1

Turma(s):

Matrícula:

**1ª Questão** Considere a superfície dada pela equação

$$S_1 : \frac{(x + \mathcal{K})^2}{100} + \frac{(y + 5 - \mathcal{K})^{\left[\frac{3 - (-1)\mathcal{K}}{2}\right]}}{8^{[1 - (-1)\mathcal{K}]}} + [(-1)^{\mathcal{K}}] \frac{z^{\left[\frac{3 + (-1)\mathcal{K}}{2}\right]}}{8^{[1 + (-1)\mathcal{K}]}} = 1$$

Classifique-a, esboce-a e preencha a tabela abaixo, de acordo com as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados.

$\mathcal{K} =$	Plano $\alpha : x =$	Plano $\beta : y =$	Plano $\gamma : z =$
Cônica:			
Equação:			
Eixo Focal:			
Centro	$C = ( \quad , \quad , \quad )$	$C = ( \quad , \quad , \quad )$	$C = ( \quad , \quad , \quad )$
Raio	$r =$	$r =$	$r =$
$a$	$a =$	$a =$	$a =$
$b$	$b =$	$b =$	$b =$
$c$	$c =$	$c =$	$c =$
Foco(s)	$F_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $F_2 = ( \quad , \quad , \quad )$	$F_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $F_2 = ( \quad , \quad , \quad )$	$F_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $F_2 = ( \quad , \quad , \quad )$
Vértice(s)	$A_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $A_2 = ( \quad , \quad , \quad )$	$A_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $A_2 = ( \quad , \quad , \quad )$	$A_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $A_2 = ( \quad , \quad , \quad )$
Vértices	$B_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $B_2 = ( \quad , \quad , \quad )$	$B_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $B_2 = ( \quad , \quad , \quad )$	$B_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $B_2 = ( \quad , \quad , \quad )$
Assíntotas			
Diretriz			

**2ª Questão** Considere a superfície dada pela equação

$$S_2 : [(-1)^{\mathcal{K}}]9x^2 - [(-1)^{\mathcal{K}}]9y^2 + 16z^2 - 32\mathcal{K}z = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

Classifique-a, esboce-a e preencha a tabela abaixo, de acordo com as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados.

$\mathcal{K} =$	Plano $\alpha : x =$	Plano $\beta : y =$	Plano $\gamma : z =$
Cônica:			
Equação:			
Eixo Focal:			
Centro	$C = ( \quad , \quad , \quad )$	$C = ( \quad , \quad , \quad )$	$C = ( \quad , \quad , \quad )$
Raio	$r =$	$r =$	$r =$
$a$	$a =$	$a =$	$a =$
$b$	$b =$	$b =$	$b =$
$c$	$c =$	$c =$	$c =$
Foco(s)	$F_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $F_2 = ( \quad , \quad , \quad )$	$F_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $F_2 = ( \quad , \quad , \quad )$	$F_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $F_2 = ( \quad , \quad , \quad )$
Vértice(s)	$A_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $A_2 = ( \quad , \quad , \quad )$	$A_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $A_2 = ( \quad , \quad , \quad )$	$A_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $A_2 = ( \quad , \quad , \quad )$
Vértices	$B_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $B_2 = ( \quad , \quad , \quad )$	$B_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $B_2 = ( \quad , \quad , \quad )$	$B_1 = ( \quad , \quad , \quad )$ $B_2 = ( \quad , \quad , \quad )$
Assíntotas			
Diretriz			

---

*Boa Sorte*

**Observações:**

- a) Substitua a constante  $\mathcal{K}$ , em todas as questões, pelo último número da sua matrícula;
- b) Preencher as duas tabelas anteriores, conforme indicado.

# RESPOSTAS

Como a resolução depende do valor de  $\mathcal{K}$ , a resposta será dada em dois casos.

**Caso:  $\mathcal{K}$  é par** \_\_\_\_\_

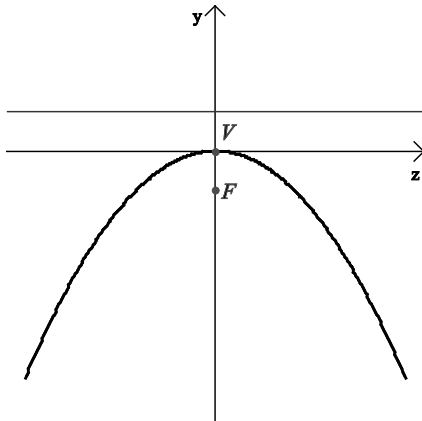
**1ª Questão [5,0]** Dados da questão:

$$S_1 : \frac{(x + \mathcal{K})^2}{100} + (y + 5 - \mathcal{K}) + \frac{z^2}{64} = 1$$

Na interseção da superfície  $S_1$  com o plano  $\alpha : x = -\mathcal{K}$ , temos a seguinte equação da **parábola**:

$$(y + 5 - \mathcal{K}) + \frac{z^2}{64} = 1$$

$$(z - 0)^2 = -64(y + 5 - \mathcal{K} - 1)$$

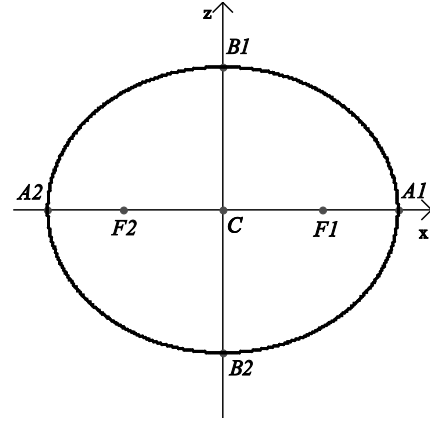


Donde:

- Vértice:  $V = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 4, 0)$
- $c = 16$
- Eixo focal:  $y$
- Foco:  $F = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 20, 0)$
- Reta diretriz:  $y = \mathcal{K} + 12$

Na interseção da superfície  $S_1$  com o plano  $\beta : y = \mathcal{K} - 5$ , temos a seguinte equação da **elipse**:

$$\frac{(x + \mathcal{K})^2}{100} + \frac{z^2}{64} = 1$$



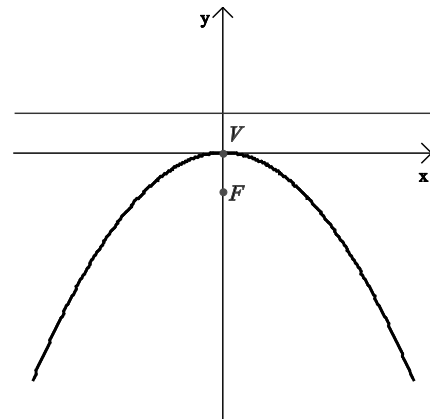
Donde:

- Centro:  $C = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, 0)$
- $a = 10$
- $b = 8$
- $c = \sqrt{100 - 64} = 6$
- Eixo focal:  $x$
- Vértices:  $A_1 = (-\mathcal{K} - 10, \mathcal{K} - 4, 0)$  e  $A_2 = (-\mathcal{K} + 10, \mathcal{K} - 5, 0)$
- Focos:  $F_1 = (-\mathcal{K} - 6, \mathcal{K} - 4, 0)$  e  $F_2 = (-\mathcal{K} + 6, \mathcal{K} - 5, 0)$
- Eixo menor:  $B_1 = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, -8)$  e  $B_2 = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, 8)$

Na interseção da superfície  $S_1$  com o plano  $\gamma : z = 0$ , temos a seguinte equação da **parábola**:

$$\frac{(x + \mathcal{K})^2}{100} + (y + 5 - \mathcal{K}) = 1$$

$$(x + \mathcal{K})^2 = -100(y + 5 - \mathcal{K} - 1)$$

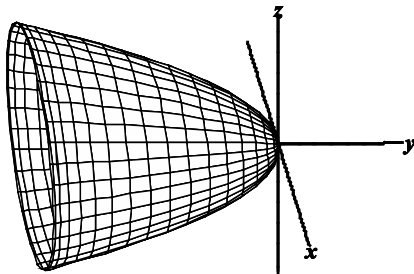


Donde:

- Vértice:  $V = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 4, 0)$

- $c = 16$
- Eixo focal:  $y$
- Foco:  $F = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 20, 0)$
- Reta diretriz:  $y = \mathcal{K} + 12$

Portanto a superfície  $S_1$  é uma



### Parabolóide Elíptica

**2ª Questão [5,0]** Dados da questão:

$$S_2 : 9x^2 - 9y^2 + 16z^2 - 32\mathcal{K}z = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

Completando quadrados na equação acima temos:

$$9x^2 - 9y^2 + 16[(z - 2\mathcal{K})^2 - \mathcal{K}^2] = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

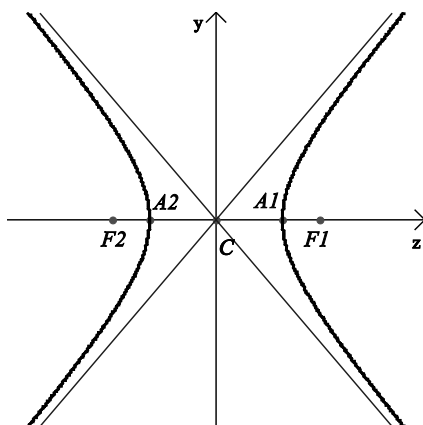
$$9x^2 - 9y^2 + 16(z - 2\mathcal{K})^2 = 144 \quad \div (9 \times 16)$$

$$S_2 : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} + \frac{(z - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$

Estando a equação da superfície mais "agradável", começaremos a classificá-la.

Na interseção da superfície  $S_2$  com o plano  $\alpha : x = 0$ , temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$-\frac{y^2}{16} + \frac{(z - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$

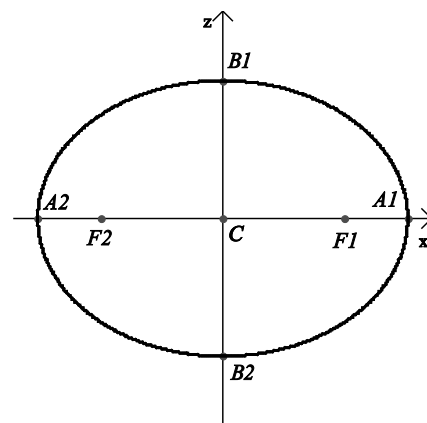


Donde:

- Centro:  $C = (0, 0, 2\mathcal{K})$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{9 + 16} = 5$
- Eixo focal:  $z$
- Vértices:  $A_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 3)$  e  $A_2 = (0, 0, 2\mathcal{K} + 3)$
- Focos:  $F_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 5)$  e  $F_2 = (0, 0, 2\mathcal{K} + 5)$
- Assíntotas:  $y = \pm \frac{4}{3}z$

Na interseção da superfície  $S_2$  com o plano  $\beta : y = 0$ , temos a seguinte equação da **elipse**:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(z - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$

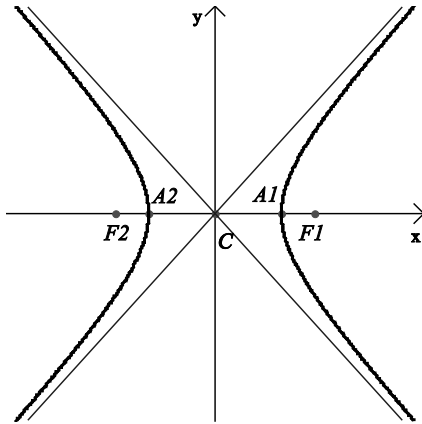


Donde:

- Centro:  $C = (0, 0, 2\mathcal{K})$
- $a = 4$
- $b = 3$
- $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$
- Eixo focal:  $x$
- Vértices:  $A_1 = (4, 0, 2\mathcal{K})$  e  $A_2 = (-4, 0, 2\mathcal{K})$
- Focos:  $F_1 = (\sqrt{7}, 0, 2\mathcal{K})$  e  $F_2 = (-\sqrt{7}, 0, 2\mathcal{K})$
- Eixo menor:  $B_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} + 3)$  e  $B_2 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 3)$

Na interseção da superfície  $S_2$  com o plano  $\gamma : z = 2\mathcal{K}$ , temos a seguinte equação da **hipérbole**:

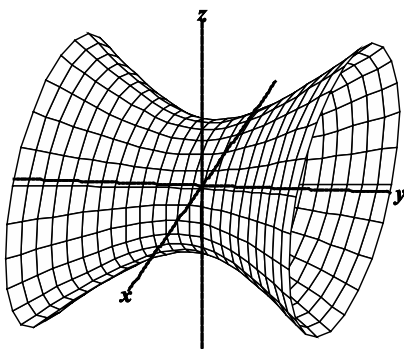
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$$



Donde:

- Centro:  $C = (0, 0, 2\mathcal{K})$
- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$
- Eixo focal:  $x$
- Vértices:  $A_1 = (4, 0, 2\mathcal{K})$  e  $A_2 = (-4, 0, 2\mathcal{K})$
- Focos:  $F_1 = (4\sqrt{2}, 0, 2\mathcal{K})$  e  $F_2 = (-4\sqrt{2}, 0, 2\mathcal{K})$
- Assíntotas:  $y = \pm x$

Portanto a superfície  $S_2$  é uma



**Hiperbolóide Elíptica de uma folha**

**Caso:  $\mathcal{K}$  é ímpar**

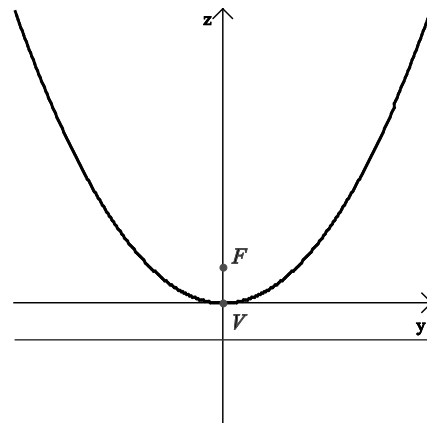
**1ª Questão [5,0]** Dados da questão:

$$S_1 : \frac{(x + \mathcal{K})^2}{100} + \frac{(y + 5 - \mathcal{K})^2}{64} - z = 1$$

Na interseção da superfície  $S_1$  com o plano  $\alpha : x = -\mathcal{K}$ , temos a seguinte equação da **parábola**:

$$\frac{(y + 5 - \mathcal{K})^2}{64} - z = 1$$

$$(y + 5 - \mathcal{K})^2 = 64(z + 1)$$



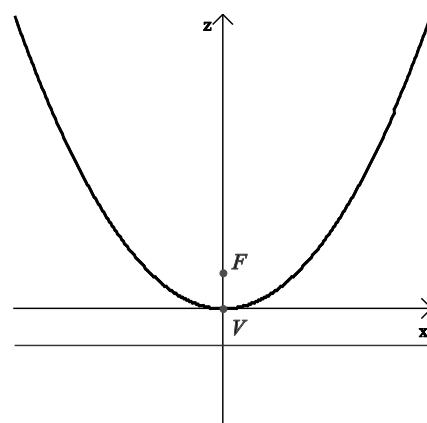
Donde:

- Vértice:  $V = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, -1)$
- $c = 16$
- Eixo focal:  $z$
- Foco:  $F = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, 15)$
- Reta diretriz:  $z = -17$

Na interseção da superfície  $S_1$  com o plano  $\beta : y = \mathcal{K} - 5$ , temos a seguinte equação da **parábola**:

$$\frac{(x + \mathcal{K})^2}{100} - z = 1$$

$$(x + \mathcal{K})^2 = 100(z + 1)$$



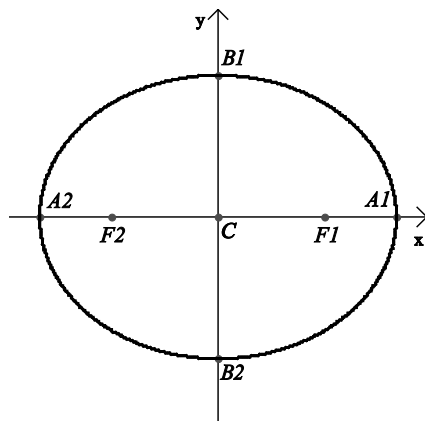
Donde:

- Vértice:  $V = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, -1)$

- $c = 25$
- Eixo focal:  $z$
- Foco:  $F = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, 24)$
- Reta diretriz:  $z = -26$

Na interseção da superfície  $S_1$  com o plano  $\gamma: z = 0$ , temos a seguinte equação da elipse:

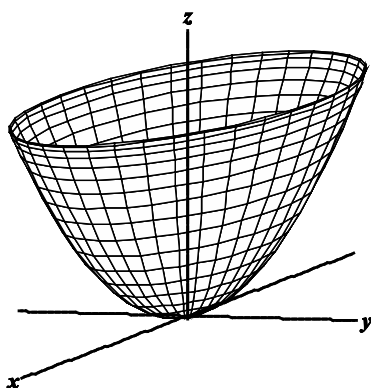
$$\frac{(x + \mathcal{K})^2}{100} + \frac{(y + 5 - \mathcal{K})^2}{64} = 1$$



Donde:

- Centro:  $C = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, 0)$
- $a = 10$
- $b = 8$
- $c = \sqrt{100 - 64} = 6$
- Eixo focal:  $x$
- Vértices:  $A_1 = (-\mathcal{K} - 10, \mathcal{K} - 5, 0)$  e  $A_2 = (-\mathcal{K} + 10, \mathcal{K} - 5, 0)$
- Focos:  $F_1 = (-\mathcal{K} - 6, \mathcal{K} - 5, 0)$  e  $F_2 = (-\mathcal{K} + 6, \mathcal{K} - 5, 0)$
- Eixo menor:  $B_1 = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} + 3, 0)$  e  $B_2 = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 13, 0)$

Portanto a superfície  $S_1$  é uma



## Parabolóide Elíptica

**2ª Questão [5,0]** Dados da questão:

$$S_2: -9x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 32\mathcal{K}z = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

Completando quadrados na equação acima temos:

$$-9x^2 + 9y^2 + 16[(z - 2\mathcal{K})^2 - \mathcal{K}^2] = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

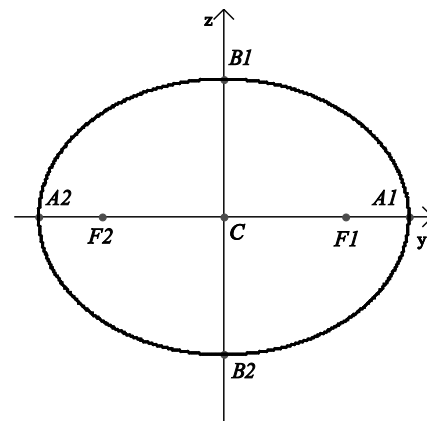
$$-9x^2 + 9y^2 + 16(z - 2\mathcal{K})^2 = 144 \quad \div (9 \times 16)$$

$$S_2: -\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{(z - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$

Estando a equação da superfície mais "agradável", começaremos a classificá-la.

Na interseção da superfície  $S_2$  com o plano  $\alpha: x = 0$ , temos a seguinte equação da elipse:

$$\frac{y^2}{16} + \frac{(z - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$

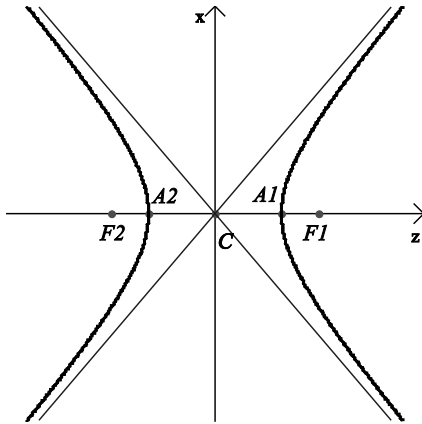


Donde:

- Centro:  $C = (0, 0, 2\mathcal{K})$
- $a = 4$
- $b = 3$
- $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$
- Eixo focal:  $y$
- Vértices:  $A_1 = (0, 4, 2\mathcal{K})$  e  $A_2 = (0, -4, 2\mathcal{K})$
- Focos:  $F_1 = (0, \sqrt{7}, 2\mathcal{K})$  e  $F_2 = (0, -\sqrt{7}, 2\mathcal{K})$
- Eixo menor:  $B_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} + 3)$  e  $B_2 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 3)$

Na interseção da superfície  $S_2$  com o plano  $\beta : y = 0$ , temos a seguinte equação da hipérbole:

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{(z - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$

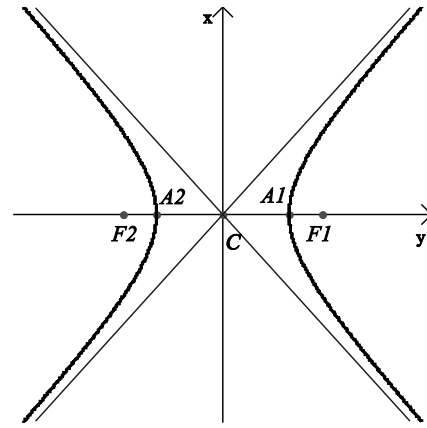


Donde:

- Centro:  $C = (0, 0, 2\mathcal{K})$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 9} = 5$
- Eixo focal:  $z$
- Vértices:  $A_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} + 3)$  e  $A_2 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 3)$
- Focos:  $F_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 5)$  e  $F_2 = (0, 0, 2\mathcal{K} + 5)$
- Assíntotas:  $y = \pm \frac{4}{3}z$

Na interseção da superfície  $S_2$  com o plano  $\gamma : z = 2\mathcal{K}$ , temos a seguinte equação da hipérbole:

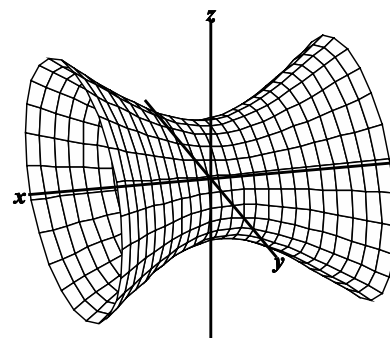
$$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$$



Donde:

- Centro:  $C = (0, 0, 2\mathcal{K})$
- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$
- Eixo focal:  $y$
- Vértices:  $A_1 = (0, 4, 2\mathcal{K})$  e  $A_2 = (0, -4, 2\mathcal{K})$
- Focos:  $F_1 = (0, 4\sqrt{2}, 2\mathcal{K})$  e  $F_2 = (0, -4\sqrt{2}, 2\mathcal{K})$
- Assíntotas:  $x = \pm y$

Portanto a superfície  $S_2$  é uma



**Hiperbolóide Elíptico de uma folha**