Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach

Adriano Thiago Lopes Bernardino

2008

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach

por

Adriano Thiago Lopes Bernardino

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Julho de 2008
João Pessoa-PB

Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach

por

Adriano Thiago Lopes Bernardino

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho - UFU

Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho - UFCG

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB (suplente)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Aos meus pais
Pedro e Benedita.

Não sei onde eu tô indo
Mas sei que eu tô no meu caminho...
(Raul Seixas e Cláudio Roberto)

Agradecimentos

Estas primeiras páginas, e últimas palavras que escrevo neste trabalho, são para dedicá-lo a todas as pessoas que me aconselharam, motivaram, orientaram, reforçaram, cuidaram, ouviram, protegeram e colaboraram ao longo desta minha época especial de vida e de trabalho.

Para além destas palavras escritas, espero encontrar melhor forma e melhor momento para dizer a todos o quanto estou agradecido e o quanto sinto que, a todos, devo um bocadinho deste trabalho.

Agradeço, primeiro a Deus - que não tem me faltado.

Um agradecimento profundo aos meus pais. O apoio, o incentivo, o carinho e o amor deles tornam cada etapa mais agradável e cada conquista mais valiosa.

Aos meus irmãos, que sempre me ajudaram em tudo que precisei. Minha irmã Gi que tirava minhas dúvidas de português pelo msn, minha irmã Nega pelas mensagens carinhosas. Meu irmão Ezinho, boas as cervejas tomadas, e meu muito obrigado pelo patrocínio. Por final, com mesma importância, Alê e Mi, pela paciência. Meu muito obrigado a todos.

Talvez nem saibam a sua importância em minha vida, meus sobrinhos Bi, Biel e Léu. Alegrias incomparáveis ao lado deles.

Não posso me furtar a registrar o meu agradecimento aos professores Everaldo Souto de Medeiros, Pedro Antonio Gomes Venegas e Milton de Lacerda Oliveira por terem colaborado com meu aprendizado.

Aos professores Geraldo Botelho, Jaime Barbosa e Everaldo Souto de Medeiros, por participarem da banca examinadora.

Aos meus amigos do Mestrado, em especial a Joedson, pela colaboração e troca de idéias valiosas, sempre me encorajando a continuar nos momentos mais difíceis. Ao meu amigo Anderson, pelos conselhos.

Ao meu orientador Daniel Marinho Pellegrino, por me ensinar matemática, português, inglês, ... Pelas conversas que sempre me esclareciam e acalmavam. Pelo constante incentivo. Agradeço, também, pela confiança desprendida, acreditando sempre no meu trabalho. Pela enorme contribuição, sem a qual este trabalho não teria sido realizado. Enfim, é um orientador exemplar.

A Capes, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

Gostaria, ainda, de aproveitar esta página para prestar um agradecimento muito especial à minha esposa Tatiane, pela paciência e compreensão, pelo apoio moral e estímulo que me permitiram levar até ao fim este trabalho, sem ela pouco teria feito.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a teoria básica de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach. Investigamos a teoria de ideais de aplicações multilineares e polinômios e métodos para se obter ideais de aplicações multilineares e polinômios a partir de ideais de operadores lineares. No capítulo final, estudamos o ideal dos operadores absolutamente somantes e um pouco dos recentes progressos da teoria não linear associada ao tema.

Palavras-Chave:
Ideais de Aplicações Multilineares, Ideais de Polinômios, Aplicações Multilineares Absolutamente Somantes, Polinômios Absolutamente Somantes, Espaços de Banach.

Abstract

In this work we have studied the basic theory of multilinear mappings and polynomials between Banach spaces. We have investigated the theory of multilinear and polynomial ideals and studied methods of creating ideals of multilinear mappings and polynomials from an operator ideal. In the final chapter, we have investigated the ideal of absolutely summing operators and some recent results of the associated nonlinear theory.

Key-Words:
Ideals of Multilinear Mappings, Ideals of Polynomials, Absolutely Summing Multilinear Mappings, Absolutely Summing Polynomials, Banach Spaces.

Sumário

Introdução

A Análise Funcional surgiu nas primeiras décadas do século 20 abstraindo os conceitos de convergência e continuidade. Um dos principais objetivos parecia ser uma tentativa de dar um tratamento unificado para várias questões que foram estudadas separadamente por séculos. Desde a publicação do famoso livro de S. Banach, em 1932, a Análise Funcional assumiu um papel fundamental na matemática moderna e tem-se desenvolvido para caminhos não lineares. Nos últimos anos, a Medalha Fields, prêmio máximo da matemática, foi, por duas vezes, concedida a pesquisadores da área de Análise Funcional.

Na década de 60, com a redescoberta dos trabalhos de A. Grothendieck, ficou evidente a importância de estudar classes especiais de operadores lineares. Segundo J. Diestel, H. Jarchow e A. Pietsch [12], o "Resumé" de Grothendieck [15] é a fonte da teoria moderna de espaços de Banach. Contudo, apenas no final da década de 60, as idéias de Grothendieck começaram a ser melhor compreendidas e reescritas de forma mais acessível, com trabalhos de J. Lindenstrauss, A. Pelczyński, A. Pietsch e outros. Essa "redescoberta" culminou com a introdução, por Pietsch, em 1970, da teoria abstrata de ideais de operadores.

Em 1983, o próprio Pietsch generalizou o conceito de ideais de operadores para aplicações multilineares, e tal idéia pode ser imediatamente adaptada para polinômios. Nas últimas duas décadas muitos avanços têm sido obtidos na teoria de ideais de polinômios e aplicações multilineares e muitos caminhos têm sido abertos para futuros trabalhos.

Levando em consideração a estreita relação entre polinômios e funções holomorfas, de certa forma a teoria de ideais de polinômios pode ser vista como a unificação de desenvolvimentos de Análise Funcional e Análise Complexa em Dimensão Infinita, via tipos de holomorfia. Nessa direção, o leitor pode consultar o recente trabalho [5].

O presente trabalho é essencialmente dedicado à teoria de ideais aplicações multilineres e polinômios entre espaços de Banach. No último capítulo, investigamos resultados recentes relacionados a ideais de aplicações multilineares que generalizam o conceito linear de operadores absolutamente somantes.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

No Capítulo 1 procuramos escrever um texto relativamente auto-suficiente, com os resultados básicos da teoria de polinômios e aplicações multilineares entre espaços de Banach, ideais de polinômios e ideais de aplicações multilineares. Não parece haver referência em português que abranja todo esse conteúdo e, mesmo em outro idioma, não conhecemos um texto que contemple todos esses resultados de forma relativamente didática.

No final do Capítulo 1 apresentamos dois métodos importantes de construção de ideais de aplicações multilineares e ideais de polinômios a partir de ideais de operadores lineares. As principais fontes de referência utilizadas nesse capítulo foram [2, 4, 7, 8, 9, 22, 23, 27, 28].

O Capítulo 2 é um estudo detalhado de [6]. Nele estudamos quais as condições que os ideais de aplicações multilineares obtidas pelo método da fatoração e linearização devem satisfazer para que sejam ideais simétricos.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo de operadores multilineares (e polinômios) absolutamente somantes. O principal objetivo desse capítulo é o estudo de teoremas do tipo Dvoretzky-Rogers no contexto multilinear e polinomial e o estudo de normas para o espaço das aplicações multilineares absolutamente somantes em todo ponto. Os resultados desse capítulo encontram-se originalmente em [1, 5, 9, 13].

Notação e Terminologia

- Em todo esse texto, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ocasionalmente escreveremos $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, com $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

- Usaremos o termo "operador" com o mesmo sentido de "função". Se E e F são espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, denotaremos por $\mathcal{L}(E; F)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de E em F.

- Se E e F são espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, o gráfico de uma função u de E em F é um subconjunto do produto cartesiano $E \times F$ formado pelos pares ordenados $(x, u(x))$, com $x \in E$. Denotamos o gráfico de u por $Graf_u$; assim

$$Graf_u = \{(x, y) \in E \times F; y = u(x)\}.$$

  Dizemos que u tem gráfico fechado se $Graf_u$ for fechado em $E \times F$.

- Se u e v são funções, a composição $u \circ v$ será às vezes denotada por uv.

- Na maior parte deste texto, $E, F, G, E_i, G_i, ...$ denotarão espaços de Banach. A norma de um espaço de Banach (ou normado) E será usualmente denotada por $\|\cdot\|$; quando maior precisão for necessaria, nós usaremos $\|\cdot\|_E$. Usaremos a norma do sup em espaços de funções, exceto menção em contrário. O símbolo B_E denotará a bola unitária fechada $\{x \in E; \|x\| \leq 1\}$. Se $x \in E$ e $r > 0$, os símbolos $B_E(x, r)$ ou $B(x, r)$ denotarão bolas de centro x e raio r. Em cada situação particular será mencionado se a bola é fechada ou aberta.

- O dual (topológico) de um espaço de Banach E será denotodo por E'.

- Um operador linear u de E em F é dito de posto finito se a dimensão de $u(E)$ for finita.

- Se A for um conjunto e $m \in \mathbb{N}$, a notação A^m denota o produto cartesiano de m cópias de A.

- Se j,$k \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k, \\ 1 & \text{se } j = k. \end{cases}$$

  δ_{jk} é chamado de delta de Kronecker.

Capítulo 1

Teoria Multilinear de Ideais entre Espaços de Banach

1.1 Ideais de Operadores (Lineares)

Nesta seção faremos uma brevíssima introdução à teoria de ideais de operadores. A principal referência utilizada é o livro [28], de autoria de A. Pietsch.

Definição 1.1.1 *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma quasi-norma é uma função $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ que satisfaz*
(i) $\|x\| \geq 0$ *para todo* x *em* E *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *para todo* x *em* E *e* λ *em* $\mathbb{K}$;
(iii) *Existe uma constante* $c \geq 1$ *tal que* $\|x + y\| \leq c \left(\|x\| + \|y\| \right)$ *para quaisquer* $x, y \in E$.

Quando $c = 1$, a quasi-norma é uma norma.

Definição 1.1.2 *Se $0 < p \leq 1$, uma p-norma em um espaço vetorial E é uma função $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ satisfazendo*
(i) $\|x\| \geq 0$ *para todo* x *em* E *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *para todo* x *em* E *e* λ *em* $\mathbb{K}$;
(iii) $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$ *para quaisquer* $x, y \in E$.

É fácil provar que toda p-norma é uma quasi-norma:

Proposição 1.1.3 *Uma p-norma é uma quasi-norma, com constante $c = 2^{\frac{1}{p}}$.*

Demonstração. De fato, para quaisquer vetores x e y, temos

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p \Rightarrow \|x + y\| \leq \sqrt[p]{\|x\|^p + \|y\|^p} \leq \sqrt[p]{(\|x\| + \|y\|)^p + (\|x\| + \|y\|)^p}$$

e daí segue que

$$\|x + y\| \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\|x\| + \|y\| \right).$$

■

Definição 1.1.4 *Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para quaisquer espaços de Banach E e F, as componentes $\mathcal{I}(E;F) = \mathcal{L}(E;F) \cap \mathcal{I}$ satisfazem:*

(i) $\mathcal{I}(E,F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ que contém os operadores de posto finito;

(ii) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \mathcal{I}(F,G)$ e $t \in \mathcal{L}(G,H)$, então $tvu \in \mathcal{I}(E;H)$.

Definição 1.1.5 *Um ideal normado (p-normado) de operadores $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de operadores $\mathcal{I}$ munido da função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0,\infty)$ tal que:*

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita a $\mathcal{I}(E;F)$ é uma norma (p-norma) para quaisquer espaços de Banach E e F;

(ii) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$, com $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dada por $id_{\mathbb{K}}(x) = x$;

(iii) Se $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{I}(F;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$, então $\|tvu\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|u\|$.

Se as componentes $\mathcal{I}(E;F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, nós dizemos que $\mathcal{I}$ é um ideal completo (ou de Banach) de operadores. No caso de ideais p-normados, dizemos que $\mathcal{I}$ é um ideal quasi-Banach.

Definição 1.1.6 *Dizemos que um ideal de Banach $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é injetivo se $\|u \circ v\|_{\mathcal{I}} = \|v\|_{\mathcal{I}}$ sempre que E, F, G são espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(F,G)$ é uma isometria sobre a imagem e $v \in \mathcal{I}(E;F)$.*

A seguinte proposição será bastante útil em todo este texto:

Proposição 1.1.7 *Seja $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores. Então, $\|t\| \leq \|t\|_{\mathcal{I}}$ para qualquer $t \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Sejam $t \in \mathcal{I}(E;F)$, $\varphi \in F'$ e $x \in E$.

Defina
$$R : \mathbb{K} \to E : R(\lambda) = \lambda x.$$
Temos $\|R\| = \|x\|$. Note que
$$\varphi \circ t \circ R = (\varphi \circ t)(x)\, id_{\mathbb{K}}. \tag{1.1}$$
Com efeito, para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, temos
$$(\varphi \circ t)(x)\, id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda (\varphi \circ t)(x).$$
Como
$$(\varphi \circ t \circ R)(\lambda) = (\varphi \circ t)(\lambda x) = \lambda (\varphi \circ t)(x),$$
segue que
$$\varphi \circ t \circ R = (\varphi \circ t)(x)\, id_{\mathbb{K}}.$$
De (1.1), temos
$$|(\varphi \circ t)(x)| = |(\varphi \circ t)(x)| \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|(\varphi \circ t)(x)\, id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi \circ t \circ R\|_{\mathcal{I}} \leq \|\varphi\| \|t\|_{\mathcal{I}} \|R\|.$$
Pelo Teorema de Hahn-Banach segue que
$$\|t(x)\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |(\varphi \circ t)(x)| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|\varphi\| \|t\|_{\mathcal{I}} \|R\| = \|t\|_{\mathcal{I}} \|x\|.$$
Portanto $\|t\| \leq \|t\|_{\mathcal{I}}$. ■

Observação 1.1.8 *Se $\varphi \in E'$, então $\|\varphi\| = \|\varphi\|_{\mathcal{I}}$. De fato, como φ é de posto finito, então $\varphi \in \mathcal{I}$ e*
$$\|\varphi\|_{\mathcal{I}} = \|id_{\mathbb{K}} \circ \varphi\|_{\mathcal{I}} \leq \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \|\varphi\| = \|\varphi\|. \tag{1.2}$$
A igualdade segue de (1.2) e da Proposição 1.1.7.

1.2 Ideais de Aplicações Multilineares entre Espaços de Banach

A seguir desenvolveremos os resultados básicos da teoria de aplicações multilineares entre espaços normados. Veremos, por exemplo, versões mullineares do Teorema do Gráfico Fechado, Princípio da Limitação Uniforme e do Teorema de Banach-Steinhaus.

1.2.1 Aplicações Multilineares

Definição 1.2.1 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $E_1, E_2, ..., E_m$ e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é m-linear (multilinear) se é linear em cada variável. Mais precisamente, $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é m-linear (multilinear) se para todos $x_1 \in E_1, ..., x_m \in E_m$ e $i = 1, ..., m$, os operadores*

$$A_{(x_1,...,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},...,x_m)} : E_i \longrightarrow F$$
$$A_{(x_1,...,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},...,x_m)}(y) = A(x_1, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_m)$$

são lineares.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, nós denotamos o conjunto de todas as aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F por $L(E_1, ..., E_m; F)$. Quando $F = \mathbb{K}$ denotamos $L(E_1, ..., E_m; F)$ por $L(E_1, ..., E_m)$ e quando $E_1 = E_2 = \cdots = E_m = E$, escrevemos $L(^mE; F)$. Vamos, por convenção, considerar $L(^0E; F) = F$. Se $m = 1$, denotamos $L(^1E, F)$ por $L(E; F)$. É fácil ver que o conjunto $L(E_1, ..., E_m; F)$ é um espaço vetorial munido com as operações usuais de espaços de funções.

Se $E_1, ..., E_m$ são espaços normados sobre $\mathbb{K}$, $E_1 \times \cdots \times E_m$ também se torna um espaço normado se considerarmos qualquer uma das normas naturais:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \|x_i\|_{E_i}$$

$$\|x\|_p = \left(\|x_i\|_{E_1}^p + \cdots + \|x_m\|_{E_m}^p\right)^{\frac{1}{p}},\ (1 \leq p < \infty),$$

onde $x = (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$. A menos que se mencione algo em contrário, usaremos a primeira como norma usual em $E_1 \times \cdots \times E_m$ e escreveremos simplesmente $\|\cdot\|$ ao invés de $\|\cdot\|_\infty$.

Se $E_1, ..., E_m$ e F são espaços vetoriais normados, como $E_1 \times \cdots \times E_m$ é ainda um espaço vetorial normado, há uma noção natural de continuidade de uma aplicação $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ (continuidade de funções entre espaços métricos). Se $B \subset E_1 \times \cdots \times E_m$, dizemos que $A : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é limitada em B se

$$\sup_{x \in B} \|A(x)\| < \infty.$$

O próximo teorema nos apresenta várias equivalências sobre a continuidade de uma aplicação multilinear:

Teorema 1.2.2 *Seja $m \in \mathbb{N}$. Se $E_1, ..., E_m$ e F são espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é uma aplicação multilinear, então são equivalentes:*

(i) A é contínua;

(ii) A é contínua na origem;

(iii) Existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|A(x_1, ..., x_m)\| \leq M \|x_1\| \cdots \|x_m\|$$

para qualquer $(x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$;

(iv) A é uniformemente contínua sobre os limitados;

(v) A é limitada em toda bola com raio finito;

(vi) A é limitada em alguma bola.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Se A é contínua, então A é contínua em todo ponto, em particular, na origem.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Como A é contínua na origem, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x \in E_1 \times \cdots \times E_m$, com $\|x\| \leq \delta$, temos $\|A(x)\| \leq \varepsilon$. Sejam $\varepsilon = 1$ e $x = (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ tal que $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, ..., m$. Então

$$\left\|\left(\frac{\delta x_1}{2\|x_1\|}, \frac{\delta x_2}{2\|x_2\|}, ..., \frac{\delta x_m}{2\|x_m\|}\right)\right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

e portanto

$$\left\|A\left(\frac{\delta x_1}{2\|x_1\|}, \frac{\delta x_2}{2\|x_2\|}, ..., \frac{\delta x_m}{2\|x_m\|}\right)\right\| \leq 1.$$

Como A é multilinear, segue que

$$\|A(x_1, x_2, ..., x_m)\| \leq \frac{2^m}{\delta^m} \|x_1\| \cdots \|x_m\|.$$

Tomando $M = \frac{2^m}{\delta^m}$ temos o desejado. Caso $x_i = 0$ para algum $i = 1, ..., m$, temos $A(x) = A(x_1, ..., 0, ..., x_m) = 0$ e a desigualdade continua válida.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Seja $a = (a_1, ..., a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$. Então, para qualquer $x = (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, temos:

$$\begin{aligned}\|A(x) - A(a)\| &\leq \|A(x_1 - a_1, x_2, ..., x_m)\| + \|A(a_1, x_2 - a_2, x_3, ..., x_m)\| \\ &+ \cdots + \|A(a_1, a_2, ..., a_{m-1}, x_m - a_m)\| \leq M \|x_1 - a_1\| \|x_2\| \cdots \|x_m\| \\ &+ \cdots + M \|a_1\| \cdots \|a_{m-1}\| \|x_m - a_m\|.\end{aligned}$$

Se $\|x\|$,$\|a\| < r$, então $\|x_i\| < r$ e $\|a_i\| < r$ para todo $i = 1, 2, ..., m$. Logo

$$\|A(x) - A(a)\| \leq Mr^{m-1}(\|x_1 - a_1\| + \cdots + \|x_m - a_m\|) \leq Mr^{m-1}m\|x - a\|.$$

Portanto A é uniformemente contínua sobre limitados.

$(iv) \Rightarrow (i)$ É imediato.

$(iii) \Rightarrow (v)$ Seja B uma bola com centro em $(a_1, ..., a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e raio r. Para qualquer $(x_1, ..., x_m)$ em B, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|A(x_1, ..., x_m)\| &\leq M \|x_1\| \cdots \|x_m\| \\ &\leq M(r + \|a_1\|) \cdots (r + \|a_m\|).\end{aligned}$$

Portanto A é limitada em B.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Óbvio.

$(vi) \Rightarrow (iii)$ Suponha que A seja limitada numa bola aberta de centro $(y_1, ..., y_m)$ e raio $\delta > 0$. Existe $N > 0$ tal que

$$\|A(y_1 + x_1, ..., y_m + x_m)\| \leq N \tag{1.3}$$

para todo $(x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ com $\|x_j\| < \delta$ para todo $j = 1, ..., m$. Temos que

$$\|A(x_1, y_2 + x_2, ..., y_m + x_m) + A(y_1, y_2 + x_2, ..., y_m + x_m)\| = \|A(y_1 + x_1, ..., y_m + x_m)\| \leq N, \quad (1.4)$$

para todo $x_j \in E_j$ com $\|x_j\| < \delta$, $j = 1, ..., m$.

De (1.3) e de (1.4) obtemos

$$\|A(x_1, y_2 + x_2, ..., y_m + x_m)\| \leq N + \|A(y_1, y_2 + x_2, ..., y_m + x_m)\| \leq N + N = 2N, \quad (1.5)$$

para todo $x_j \in E_j$ com $\|x_j\| < \delta$, $j = 1, ..., m$.

Novamente

$$\begin{aligned} &\|A(x_1, x_2, y_3 + x_3, ..., y_m + x_m) + A(x_1, y_2, y_3 + x_3, ..., y_m + x_m)\| \quad (1.6) \\ &= \|A(x_1, y_2 + x_2, ..., y_m + x_m)\| \leq 2N, \end{aligned}$$

para todo $x_j \in E_j$ com $\|x_j\| < \delta$, $j = 1, ..., m$.

De (1.5) e (1.6), temos

$$\|A(x_1, x_2, y_3 + x_3, ..., y_m + x_m)\| \leq 2N + \|A(x_1, y_2, y_3 + x_3, ..., y_m + x_m)\| \leq 2N + 2N = 4N,$$

para todo $x_j \in E_j$ com $\|x_j\| < \delta$, $j = 1, ..., m$.

Repetindo esse processo teremos que

$$\|A(x_1, ..., x_m)\| \leq 2^m N,$$

sempre que $\|x_j\| < \delta$, $j = 1, ..., m$. Então, para qualquer $(x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ com $x_j \neq 0$, $j = 1, ..., m$, temos

$$\left\| A\left(\frac{\delta x_1}{2\|x_1\|}, ..., \frac{\delta x_m}{2\|x_m\|} \right) \right\| \leq 2^m N.$$

Pela multilinearidade segue facilmente que

$$\|A(x_1, ..., x_m)\| \leq \frac{2^{2m}}{\delta^m} N \|x_1\| \cdots \|x_m\| \quad (1.7)$$

para todo $0 \neq x_j \in E_j$, $j = 1, ..., m$. No caso em que algum x_j é nulo, é fácil ver que (1.7) também vale.

Raciocínio similar serve para o caso de uma bola fechada. ■

Como foi visto na demonstração, não mostramos que a aplicação multilinear é uniformemente contínua (vimos apenas a continuidade uniforme nos limitados). Na verdade, nenhuma aplicação multilinear ($m \geq 2$) é uniformemente contínua, exceto a aplicação nula, como será visto a seguir:

Seja $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ uma aplicação m-linear não nula ($m \geq 2$). Então, existem $(x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e $r > 0$ tais que $\|A(x_1, ..., x_m)\| > r > 0$. Tomemos $\varepsilon = r$. Para qualquer $\delta > 0$, como os $x_i s$ são não nulos, podemos escolher $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \lambda < \frac{\delta}{\|x_1\|}$, ou seja, $\|\lambda x_1\| < \delta$. Daí

$$\left\| (x_1 + \lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, ..., x_m) - (x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, ..., x_m) \right\| = \|\lambda x_1\| < \delta.$$

Mas

$$\begin{aligned} \left\| A(x_1 + \lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, ..., x_m) - A(x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, ..., x_m) \right\| &= \left\| A(\lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, ..., x_m) \right\| \\ &= \|A(x_1, x_2, x_3, ..., x_m)\| > r. \end{aligned}$$

Logo A não é uniformemente contínua.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, nós denotamos o conjunto de todas as aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$. Quando $E_1 = \cdots = E_m = E$, escrevemos $\mathcal{L}(^m E; F)$ e, se $F = \mathbb{K}$, usamos $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E_1, ..., E_m)$ e $\mathcal{L}(^m E) = \mathcal{L}(^m E; \mathbb{K})$. Representamos $\mathcal{L}(^1 E; F)$ por $\mathcal{L}(E; F)$.

A multilinearidade de uma aplicação foi definida em termos de suas variáveis, mas é importante perceber que isso não pode ser feito com a continuidade, pois uma aplicação multilinear pode ser contínua em cada variável, separadamente, sem ser contínua, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 1.2.3 *Seja $E = \mathcal{C}([0,1])$ o espaço vetorial das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, munido da norma $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt$. A aplicação $B \in L(^2 E)$ definida por*

$$B(x,y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$$

é separadamente contínua.

De fato, como $[0,1]$ é compacto, para cada $x \in E$, existe $C_x < \infty$ tal que

$$\sup_{|t| \leq 1} |x(t)| = C_x < \infty.$$

Logo,

$$|B(x,y)| \leq \int_0^1 |x(t)y(t)|\, dt \leq \sup_{|t| \leq 1} |x(t)| \int_0^1 |y(t)|\, dt = \sup_{|t| \leq 1} |x(t)| \, \|y\| = C_x \|y\|.$$

Assim, B é contínua na segunda variável e, de modo análogo, tem-se que B é contínua na primeira variável.

Para provar que B não é contínua, consideremos a seqüência

$$x_n(t) = \begin{cases} n - n^3 t, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{n^2} \\ 0, & \text{se } \frac{1}{n^2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Temos

$$\|x_n\| = \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left| n - n^3 t \right| dt = \int_0^{\frac{1}{n^2}} (n - n^3 t) dt = \frac{1}{2n}$$

e daí segue que $(x_n, x_n) \longrightarrow (0,0)$. Mas $B(x_n, x_n)$ não converge para $B(0,0) = 0$, pois

$$B(x_n, x_n) = \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left(n - n^3 t \right)^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Portanto, B não é contínua.

A seguir veremos que a noção de norma em $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$ é naturalmente concebida a partir do caso linear. Veremos também, um pouco mais adiante, que quando $E_1, ..., E_m$ são espaços de Banach, as aplicações m-lineares definidas em $E_1 \times \cdots \times E_m$ são separadamente contínuas se, e somente se, são contínuas.

Proposição 1.2.4 *Seja $m \in \mathbb{N}$. Se $E_1, ..., E_m$ e F são espaços normados sobre $\mathbb{K}$, então a função $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| \, ; x \in E_1 \times \cdots \times E_m, \|x\|_\infty \leq 1\} \tag{1.8}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$.

Demonstração. Como $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$, pelo Teorema 1.2.2 temos que $\|A\|$ está bem definida.

Vejamos que $\|\cdot\|$ satisfaz as condições de norma:

(i) É claro que $\|A\| \geq 0$ e, se $\|A\| = 0$, então

$$\sup\{\|A(x)\|\,; x \in E_1 \times \cdots \times E_m, \|x\|_\infty \leq 1\} = 0,$$

ou seja,

$$A(x) = 0, \forall x = (x_1, ..., x_m) \in B_{E_1} \times \cdots \times B_{E_m}.$$

Sejam $x_j \in E_j, j = 1, ..., m$. Se algum $x_j = 0$ então $A(x_1, ..., x_m) = 0$. Caso contrário, se $x = (x_1, ..., x_m)$, temos

$$\|A(x)\| = \left\| A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, ..., \frac{x_m}{\|x_m\|}\right) \right\| \|x_1\| \cdots \|x_m\| = 0,$$

e portanto $\|A(x)\| = 0$, $\forall (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, ou seja, $A \equiv 0$. É claro que se $A \equiv 0$ então $\|A\| = 0$.

(ii) Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos

$$\begin{aligned}\|\lambda A\| &= \sup\{\|\lambda A(x)\|\,; x \in E_1 \times \cdots \times E_m, \|x\|_\infty \leq 1\} \\ &= |\lambda| \sup\{\|A(x)\|\,; x \in E_1 \times \cdots \times E_m, \|x\|_\infty \leq 1\} = |\lambda| \|A\|.\end{aligned}$$

(iii) Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$. Temos

$$\begin{aligned}\|A_1 + A_2\| &= \sup\{\|A_1(x) + A_2(x)\|\,; x \in E_1 \times \cdots \times E_m, \|x\|_\infty \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|A_1(x)\| + \|A_2(x)\|\,; x \in E_1 \times \cdots \times E_m, \|x\|_\infty \leq 1\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{2} \sup\{\|A_j(x)\|\,; x \in E_1 \times \cdots \times E_m, \|x\|_\infty \leq 1\} \\ &= \|A_1\| + \|A_2\|.\end{aligned}$$

Portanto $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$. ■

Observação 1.2.5 *Note que da própria definição de* sup *em (1.8) segue que se* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$, *então* $\|T\|$ *é o ínfimo das constantes* M *tais que*

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq M.$$

Teorema 1.2.6 *Sejam* $E_1, ..., E_m$ *espaços de Banach e* F *um espaço vetorial normado. Então a aplicação* $A \in L(E_1, ..., E_m; F)$ *é contínua se, e somente se, é contínua em cada variável.*

Demonstração. Seja A uma aplicação m-linear contínua. Então, para cada $i = 1, ..., m$ e cada $x_j \in E_j, j = 1, ..., m$, os operadores

$$\begin{aligned}A_{(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_m)} &: E_i \longrightarrow F \\ A_{(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_m)}(y) &= A(x_1, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_m)\end{aligned}$$

são contínuos. Com efeito,

$$\begin{aligned}\left\|A_{(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_m)}(y)\right\| &= \|A(x_1, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_m)\| \\ &\leq \|A\| \|x_1\| \cdots \|y\| \cdots \|x_m\| \\ &= \|A\| \|x_1\| \overset{[i]}{\cdots} \|x_m\| \|y\| \\ &= C \|y\|,\end{aligned}$$

onde $C = \|A\| \, \|x_1\| \overset{[i]}{\cdots} \|x_m\|$ ($\overset{[i]}{\cdots}$ significa que $\|x_i\|$ não esta envolvido).

A recíproca será provada por indução em m. Consideremos a aplicação bilinear $A : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ contínua em cada variável. Para cada $y \in E_2$, a função definida por $A_y(x) = A(x, y)$ é linear e contínua e, para cada $x \in E_1$, temos $A_x(y) = A(x, y)$, que também é linear e contínua. Pelo Teorema 1.2.2, com $m = 1$, temos que, para todo $y \in E_2$

$$\|A(x, y)\| = \|A_x(y)\| \le M_x \|y\| .$$

Logo, se $\|y\| \le 1$, temos

$$\|A_y(x)\| = \|A(x, y)\| = \|A_x(y)\| \le M_x.$$

Considerando a família

$$\mathcal{F} = \{A_y; y \in B_{E_2}\},$$

temos que

$$\|A_y(x)\| \le M_x \quad \forall A_y \in \mathcal{F}.$$

Como A_y está definida em um espaço de Banach, então, pelo Teorema da Limitação Uniforme existe $M > 0$ tal que

$$\|A_y\| \le M, \quad \forall A_y \in \mathcal{F}.$$

Portanto, para quaisquer $x \in E_1$ e $y \in E_2$ com $\|y\| \le 1$ e $\|x\| \le 1$, temos

$$\|A(x, y)\| = \|A_y(x)\| \le \|A_y\| \le M$$

e concluímos que

$$\|A(x, y)\| \le M \|x\| \|y\|, \forall (x, y) \in E_1 \times E_2.$$

Assim, pelo Teorema 1.2.2, temos que A é contínua.

Suponhamos que toda aplicação $(m-1)$-linear contínua em cada variável seja contínua.

Agora tomemos A uma aplicação m-linear contínua em cada variável. Para cada x_m, a aplicação $A_{x_m}(x_1, ..., x_{m-1}) = A(x_1, ..., x_m)$ é $(m-1)$-linear contínua em cada variável e, por hipótese de indução, contínua. Então existe $M_{x_m} > 0$ tal que

$$\|A(x_1, ..., x_m)\| = \|A_{x_m}(x_1, ..., x_{m-1})\| \le M_{x_m} \|x_1\| \cdots \|x_{m-1}\| .$$

Se $\|x_i\| \le 1$ para todo $i = 1, ..., m-1$, temos

$$\|A(x_1, ..., x_m)\| \le M_{x_m}.$$

Considere a família

$$\mathcal{F} = \left\{A_{x_1,...,x_{m-1}}; x_i \in B_{E_i}, i = 1, ..., m-1\right\}.$$

Para cada $x_m \in E_m$, temos

$$\left\|A_{x_1,...,x_{m-1}}(x_m)\right\| \le M_{x_m} \text{ para todo } A_{x_1,...,x_{m-1}} \text{ em } \mathcal{F}.$$

Pelo Teorema da Limitação Uniforme, existe $M > 0$ tal que

$$\left\|A_{x_1,...,x_{m-1}}\right\| \le M, \quad \forall A_{x_1,...,x_{m-1}} \in \mathcal{F}$$

e concluímos que, para todo $x_i \in E_i$ com $\|x_i\| \le 1$, $i = 1, ..., m$, tem-se

$$\|A(x_1, ..., x_m)\| = \left\|A_{x_1,...,x_{m-1}}(x_m)\right\| \le M \|x_m\| \le M$$

e portanto A é contínua. ■

O próximo resultado pode ser demonstrado diretamente, usando as bases dos espaços de dimensão finita envolvidos. Entretanto, apresentaremos uma demonstração alternativa, usando o teorema anterior.

Corolário 1.2.7 *Se $E_1, ..., E_m$ têm dimensão finita, então toda $T \in L(E_1, ..., E_m; F)$ é contínua.*

Demonstração. De fato, toda aplicação linear definida em um espaço de dimensão finita é contínua, portanto a multilinear é contínua separadamente em cada variável. Como os espaços $E_1, ..., E_m$ têm dimensão finita, eles são espaços de Banach e, pelo Teorema 1.2.6, a multilinear será contínua. ■

Teorema 1.2.8 (Teorema do Gráfico Fechado para Aplicações Multilineares) *Sejam $E_1, ..., E_m$ e F espaços de Banach e $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ uma aplicação m-linear de gráfico fechado. Então A é contínua.*

Demonstração. Sejam $x_i \in E_i$, $i = 1, ..., m$ fixados. Vamos mostrar que $A_{(x_2,...,x_m)} : E_1 \longrightarrow F$ tem gráfico fechado. Seja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em E_1 com $y_n \to y$ em E_1 e $A_{(x_2,...,x_m)}(y_n) \to z \in F$. Como $y_n \to y$ em E_1, temos

$$\|(y_n, x_2, ..., x_m) - (y, x_2, ..., x_m)\| = \|(y_n - y, 0, ..., 0)\| = \|y_n - y\|$$

e assim

$$\lim_{n\to\infty} (y_n, x_2, ..., x_m) = (y, x_2, ..., x_m)$$

em $E_1 \times \cdots \times E_m$. Como $A(y_n, x_2, ..., x_m) = A_{(x_2,...,x_m)}(y_n)$ converge para z em F, temos que $((y_n, x_2, ..., x_m), A(y_n, x_2, ..., x_m))_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência no gráfico de A que converge para $((y, x_2, ..., x_m), z)$. Como A tem gráfico fechado, segue que $((y, x_2, ..., x_m), z)$ pertence ao gráfico de A, ou seja,

$$z = A(y, x_2, ..., x_m) = A_{(x_2,...,x_m)}(y).$$

Logo $A_{(x_2,...,x_m)}$ tem gráfico fechado e, pelo Teorema do Gráfico Fechado, $A_{(x_2,...,x_m)}$ é contínua. Do mesmo modo mostra-se que $A_{(x_1,x_3,...,x_m)}, ..., A_{(x_1,...,x_{m-1})}$ são contínuas, e o Teorema 1.2.6 garante que A é contínua. ■

O próximo teorema é uma versão do Teorema da Limitação Uniforme para Aplicações Multilineares. Sua demonstração pode ser encontrada em [30], porém é complicada e usa o Teorema da Limitação Uniforme no caso linear. Aqui apresentamos uma demonstração mais natural, simples e, tomando $m = 1$, temos a demonstração original do caso linear.

Teorema 1.2.9 (Teorema da Limitação Uniforme para Aplicações Multilineares) *Sejam $E_j, j = 1, ..., m$, espaços de Banach, F espaço vetorial normado e $\{T_i\}_{i\in I}$ uma família de aplicações m-lineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F. Se*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x_1, ..., x_m)\| < \infty \text{ para todo } (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m, \tag{1.9}$$

então

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$A_n = \left\{ (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m; \sup_{i\in I} \|T_i(x_1, ..., x_m)\| \leq n \right\}.$$

É facil ver que cada A_n é fechado e, de (1.9), segue que

$$E_1 \times \cdots \times E_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Pelo Teorema de Baire, existe um inteiro positivo n_0 tal que A_{n_0} tem interior não vazio. Sejam $int\,(A_{n_0})$ o interior de A_{n_0}, $(a_1,...,a_m) \in int\,(A_{n_0})$ e $r > 0$ tais que a bola aberta $B_{E_1\times\cdots\times E_m}\left((a_1,...,a_m)\,;r\right)$ está contida em A_{n_0}.

Assim,

$$\left\|T_i\left(x_1,...,x_m\right)\right\| \leq n_0$$

para todo $i \in I$ e todo $(x_1,...,x_m) \in B_{E_1\times\cdots\times E_m}\left((a_1,...,a_m)\,;r\right)$. Pelo mesmo argumento usado na demonstração $(vi) \Rightarrow (iii)$ do Teorema 1.2.2, segue que

$$\left\|T_i\left(x_1,...,x_m\right)\right\| \leq 2^m n_0 \tag{1.10}$$

para todo $i \in I$ e todo $(x_1,...,x_m)$ na bola aberta $B_{E_1\times\cdots\times E_m}\left(0;r\right)$. Portanto,

$$\sup_{i\in I}\left\|T_i\right\| \leq \frac{2^m n_0}{r^m}.$$

■

O seguinte corolário é um versão natural do Teorema de Banach-Steinhaus para o caso de aplicações multilineares.

Corolário 1.2.10 (Teorema de Banach-Steinhaus para Aplicações Multilineares) *Sejam $E_1,...,E_m$ espaços de Banach, F um espaço vetorial normado e $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}\left(E_1,...,E_m;F\right)$ tal que para cada $x_j \in E_j$, a seqüência $(A_n(x_1,...,x_m))_{n=1}^{\infty}$ é convergente. Se*

$$A(x_1,...,x_m) = \lim_{n\to\infty} A_n(x_1,...,x_m),$$

então $A \in \mathcal{L}\left(E_1,...,E_m;F\right)$.

Demonstração. Claramente A é m-linear. Como $(A_n(x_1,...,x_m))_{n=1}^{\infty}$ é convergente, segue que $(A_n(x_1,...,x_m))_{n=1}^{\infty}$ é limitada. Portanto

$$\sup_n \left\|A_n(x_1,...,x_m)\right\| < \infty \text{ para todo } (x_1,...,x_m) \in E_1\times\cdots\times E_m.$$

Logo, pelo Teorema 1.2.9, existe um número real $C > 0$ tal que

$$\sup_n \left\|A_n\right\| < C.$$

Assim,

$$\left\|A_n(x_1,...,x_m)\right\| \leq \left\|A_n\right\|\left\|x_1\right\|\cdots\left\|x_m\right\| < C\left\|x_1\right\|\cdots\left\|x_m\right\|,$$

e, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\left\|A(x_1,...,x_m)\right\| \leq C\left\|x_1\right\|\cdots\left\|x_m\right\|,$$

e A é contínua. ■

Teorema 1.2.11 *Sejam $\{j_1,...,j_r\} \subset \{1,...,m\}$ e $\{i_1,...,i_s\} \subset \{1,...,m\}$ com $j_1 < \cdots < j_r$ e $i_1 < \cdots < i_s$ tais que $\{j_1,...,j_r\} \cup \{i_1,...,i_s\} = \{1,...,m\}$. Se $E_1,...,E_m,G$ são evn, a função*

$$\Phi_{\{j_1,...,j_r\}} : \mathcal{L}\left(E_1,E_2,...,E_m;G\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left(E_{j_1},E_{j_2},...,E_{j_r};\mathcal{L}\left(E_{i_1},...,E_{i_s};G\right)\right)$$

definida por

$$\Phi_{\{j_1,...,j_r\}}(A)(x)(y) = A(x,y),$$

com $x = (x_{j_1},...,x_{j_r}) \in E_{j_1}\times\cdots\times E_{j_r}$, e $y = (y_{i_1},...,y_{i_s}) \in E_{i_1}\times\cdots\times E_{i_s}$, é uma isometria linear.

Demonstração. Por simplicidade, vamos mostrar o caso $j_k = k$, para $k = 1, ..., n$. Temos

$$\Phi_{\{1,2,...,n\}} : \mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_m; G) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_n; \mathcal{L}(E_{n+1}, ..., E_m; G)),$$

dada por

$$\Phi_{\{1,2,...,n\}}(A)(x)(y) = A(x, y),$$

com $x = (x_1, ..., x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, e $y = (y_{n+1}, ...y_m) \in E_{n+1} \times \cdots \times E_m$.

Primeiro vamos verificar que $\Phi_{\{1,2,...,n\}}$ está bem definida.

Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_1, ..., x_n, y_{n+1}, ..., y_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e $x \in E_1$. Então

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\{1,2,...,n\}}(A)(x_1 + \lambda x, x_2, ..., x_n)(y_{n+1}, ...y_m) \\
&= A(x_1 + \lambda x, x_2, ..., x_n, y_{n+1}, ..., y_m) \;\; (A \text{ é } m\text{-linear}) \\
&= A(x_1, ..., x_n, y_{n+1}, ...y_m) + \lambda A(x, x_2, ..., x_n, y_{n+1}, ..., y_m) \\
&= \Phi_{\{1,2,...,n\}}(A)(x_1, ..., x_n)(y_{n+1}, ..., y_m) \\
&+ \lambda \Phi_{\{1,2,...,n\}}(A)(x, x_2, ..., x_n)(y_{n+1}, ..., y_m).
\end{aligned}$$

Portanto $\Phi_{\{1,2,...,n\}}(A)$ é linear em relação à primeira variável. Fazendo as mesmas contas para as outras variáveis teremos que $\Phi_{\{1,2,...,n\}}(A)$ é n-linear. De modo análogo, teremos que $\Phi_{\{1,2,...,n\}}(A)(x)$ é $(m-n)$-linear.

Vamos ver agora que $\Phi_{\{1,2,...,n\}}$ toma seus valores em $\mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_n; \mathcal{L}(E_{n+1}, ..., E_m; G))$. Dada $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; G)$, para $x \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ fixo, temos

$$\left\|\Phi_{\{1,2,...,n\}}(A)(x)(y)\right\| = \|A(x, y)\| \leq \|A\| \|x_1\| \cdots \|x_n\| \|y_{n+1}\| \cdots \|y_m\| \leq M \|y_{n+1}\| \cdots \|y_m\|. \quad (1.11)$$

Portanto,

$$\Phi_{\{1,2,...,n\}}(A)(x) \in \mathcal{L}(E_{n+1}, ..., E_m; G).$$

Além disso, de (1.11) temos também que

$$\Phi_{\{1,2,...,n\}}(A) \in \mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_n; \mathcal{L}(E_{n+1}, ..., E_m; G)).$$

Note que

$$\left\|\Phi_{\{1,2,...,n\}}(A)\right\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\|\Phi_{\{1,2,...,n\}}(A)(x)\right\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sup_{\|y\| \leq 1} \|A(x, y)\|\right) = \|A\|. \quad (1.12)$$

Se $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_n; \mathcal{L}(E_{n+1}, ..., E_m; G))$, seja A dada por

$$A(x, y) = B(x)(y).$$

Assim, A é multilinear e, como B e $B(x)$ são contínuas, temos

$$\|A(x, y)\| = \|B(x)(y)\| \leq \|B(x)\| \|y_1\| \cdots \|y_n\| \leq \|B\| \|x_1\| \cdots \|x_m\| \|y_1\| \cdots \|y_n\|,$$

e portanto $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_m; G)$. Logo $\Phi_{\{1,2,...,n\}}(A) = B$ e $\Phi_{\{1,2,...,n\}}$ é sobrejetiva, e por (1.12), $\Phi_{\{1,2,...,n\}}$ é injetiva. Também por (1.12) temos que $\Phi_{\{1,2,...,n\}}$ é simétrica. ■

Quando $r = 1$, escreveremos I_j em vez de $\Phi_{\{j\}}$, para qualquer $j = 1, 2, ..., m$.

Corolário 1.2.12 *Se $m \in \mathbb{N}$ e F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_m; F)$ é um espaço de Banach para quaisquer espaços normados $E_1, E_2, ..., E_m$.*

Demonstração. Procederemos por indução em m. No caso $m = 1$, caímos no caso linear, e daí $\mathcal{L}(E_1; F)$ é um espaço de Banach (esse é um resultado conhecido da Análise Funcional). Suponha o resultado válido para $m \geq 1$. Pelo teorema anterior, $\mathcal{L}(E_0, E_1, E_2, ..., E_m; F)$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{L}(E_0; \mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_m; F))$ que é Banach, pois $\mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_m; F)$ é Banach por hipótese. Logo $\mathcal{L}(E_0, E_1, E_2, ..., E_m; F)$ é um espaço de Banach. ■

1.2.2 Aplicações Multilineares Simétricas

Para cada $m \in \mathbb{N}$, nós denotamos por S_m o conjunto de todas as permutações de $\{1, ..., m\}$, isto é, o conjunto de todos as bijeções $\sigma : \{1, ..., m\} \longrightarrow \{1, ..., m\}$.

Definição 1.2.13 *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma aplicação m-linear $A : E \times \cdots \times E \longrightarrow F$ é simétrica se, para quaisquer $x_1, ..., x_m \in E$, tivermos*

$$A(x_1, ..., x_m) = A(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)})$$

para toda permutação $\sigma \in S_m$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos por $L_s(^mE; F)$ o espaço vetorial (subespaço de $L(^mE; F)$) formado por todas aplicações m-lineares de E^m em F que são simétricas. Analogamente, denotamos por $\mathcal{L}_s(^mE; F)$ o subespaço formado por todas as aplicações multilineares contínuas de E^m em F que são simétricas. Quando $F = \mathbb{K}$, nós escrevemos $L_s(^mE; F) = L_s(^mE)$, $\mathcal{L}_s(^mE; F) = \mathcal{L}_s(^mE)$ e, se $m = 0$, escrevemos $\mathcal{L}_s(^0E; F) = \mathcal{L}(^0E; F) = F$.

Definição 1.2.14 *Para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada multi-índice $\gamma = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}_0^k$, definimos*

$$\begin{cases} \|\gamma\| = n_1 + \cdots + n_k \\ \gamma! = \prod_{j=1}^{k} n_j! \end{cases}$$

Definição 1.2.15 *Sejam $A \in L(^mE; F)$ e $k \leq m$. Para cada $(x_1, ..., x_k) \in E^k$, e para cada $\gamma = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ com $\|\gamma\| = m$, definimos*

$$Ax_1^{n_1}...x_k^{n_k} = A(\overbrace{x_1, ..., x_1}^{n_1 \ vezes}, ..., \overbrace{x_k, ..., x_k}^{n_k \ vezes}).$$

A seguir se $A \in L_s(^mE; F)$ e se $x \in E$, usaremos a notação $A(x)$ para denotar a aplicação $(m-1)$-linear

$$A(x)(x_2, ..., x_m) = A(x, x_2, ..., x_m).$$

Teorema 1.2.16 (Fórmula de Leibniz) *Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $A \in L_s(^mE; F)$. Então para quaisquer $x_1, ..., x_k \in E$, temos*

$$A(x_1 + \cdots + x_k)^m = \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{\gamma!} Ax_1^{n_1}...x_k^{n_k}.$$

Demonstração. Por indução em m. Para $m = 1$, temos $n_j = 1$ para algum $j = 1, ..., k$, e os demais nulos. Logo

$$\sum_{\|\gamma\|=1} \frac{1!}{\gamma!} Ax_1^{n_1}...x_k^{n_k} = Ax_1 + \cdots + Ax_k = A(x_1 + \cdots + x_k).$$

Suponha a fórmula válida para um certo $m \geq 1$.

Seja

$$A \in L_s(^{m+1}E; F).$$

Sabemos que

$$A(x_1 + \cdots + x_k)^{m+1} = A(x_1 + \cdots + x_k)(x_1 + \cdots + x_k)^m.$$

Como

$$A(x_1 + \cdots + x_k) \in L_s(^mE; F),$$

pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} A(x_1 + \cdots + x_k)^{m+1} &= A(x_1 + \cdots + x_k)(x_1 + \cdots + x_k)^m \\ &= \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{\gamma!} A(x_1 + \cdots + x_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k} \\ &= \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{\gamma!} A x_1^{n_1+1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k} + \cdots + \\ &+ \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{\gamma!} A x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k+1} \end{aligned}$$

com $\gamma = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ e $\|\gamma\| = m$. Para cada $i = 1, ..., k$, sejam $\beta^i = \left(\beta_1^i, ..., \beta_k^i\right) \in \mathbb{N}_0^k$, tais que

$$\begin{cases} \beta_j^i = n_i + 1, & \text{se } j = i \\ \beta_j^i = n_j, & \text{se } j \neq i, \end{cases}$$

para todo $j = 1, ..., k$ e

$$\left\|\beta^i\right\| = \beta_1^i + \cdots + \beta_k^i = m + 1.$$

Logo

$$\begin{aligned} & A(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^{m+1} \\ &= \sum_{\|\beta^1\|=m+1} \frac{m!}{(\beta_1^1 - 1)!\beta_2^1! \cdots \beta_k^1!} A x_1^{\beta_1^1} ... x_k^{\beta_k^1} + \cdots + \sum_{\|\beta^k\|=m+1} \frac{m!}{\beta_1^k! \cdots (\beta_k^k - 1)!} A x_1^{\beta_1^k} ... x_k^{\beta_k^k}, \end{aligned}$$

e se $\beta = (\beta_1, ..., \beta_k) \in \mathbb{N}_0^k$, então

$$\begin{aligned} & A(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^{m+1} \\ &= \sum_{\substack{\|\beta\|=m+1 \\ \beta_1 \geq 1}} \frac{m!}{(\beta_1 - 1)!\beta_2! \cdots \beta_k!} A x_1^{\beta_1} ... x_k^{\beta_k} + \cdots + \sum_{\substack{\|\beta\|=m+1 \\ \beta_k \geq 1}} \frac{m!}{\beta_1! \cdots (\beta_k - 1)!} A x_1^{\beta_1} ... x_k^{\beta_k} \\ &= \sum_{\substack{\|\beta\|=m+1 \\ \beta_1 \geq 1}} \frac{\beta_1 m!}{\beta_1!\beta_2! \cdots \beta_k!} A x_1^{\beta_1} ... x_k^{\beta_k} + \cdots + \sum_{\substack{\|\beta\|=m+1 \\ \beta_k \geq 1}} \frac{\beta_k m!}{\beta_1! \cdots \beta_k!} A x_1^{\beta_1} ... x_k^{\beta_k}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Note que

$$\sum_{\substack{\|\beta\|=m+1 \\ \beta_1 = 0}} \frac{\beta_1 m!}{\beta_1!\beta_2! \cdots \beta_k!} A x_1^{\beta_1} ... x_k^{\beta_k} = \sum_{\substack{\|\beta\|=m+1 \\ \beta_k = 0}} \frac{\beta_k m!}{\beta_1! \cdots (\beta_k - 1)!} A x_1^{\beta_1} ... x_k^{\beta_k} = 0,$$

e portanto podemos considerar as somas na última igualdade de (1.13) incluindo os casos $\beta_1 = 0, ..., \beta_k = 0$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
A(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{m+1} &= \sum_{\|\beta\|=m+1}\frac{\beta_1 m!}{\beta_1!\beta_2!\cdots\beta_k!}Ax_1^{\beta_1}...x_k^{\beta_k}+\cdots+\sum_{\|\beta\|=m+1}\frac{\beta_k m!}{\beta_1!\cdots\beta_k!}Ax_1^{\beta_1}...x_k^{\beta_k}\\
&= \sum_{\|\beta\|=m+1}(\beta_1+\cdots+\beta_k)\,\frac{m!}{\beta_1!\beta_2!\cdots\beta_k!}Ax_1^{\beta_1}...x_k^{\beta_k}\\
&= \sum_{\|\beta\|=m+1}\frac{(m+1)!}{\beta_1!\beta_2!\cdots\beta_k!}Ax_1^{\beta_1}...x_k^{\beta_k}.
\end{aligned}
$$

■

Corolário 1.2.17 (Fórmula Binomial de Newton) *Se* $A \in L_s({}^mE;F)$ *então para quaisquer* $x, y \in E$ *temos*

$$
A(x+y)^m = \sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} Ax^{m-j}y^j.
$$

O seguinte teorema nos permite obter uma boa relação entre aplicações multilineares simétricas e polinômios.

Teorema 1.2.18 (Fórmula de Polarização) *Sejam* E, F *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$. *Se* $A \in L_s({}^mE;F)$ *então*

$$
A(x_1,...,x_m) = \frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m A(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)^m,
$$

para quaisquer $x_0, x_1, x_2, ..., x_m \in E$.

Demonstração. Pela Fórmula de Leibniz temos

$$
A(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)^m = \sum_{\|\gamma\|=m}\frac{m!}{n_0!\cdots n_m!}Ax_0^{n_0}(\varepsilon_1x_1)^{n_1}...(\varepsilon_mx_m)^{n_m}
$$

$$
= \sum_{\|\gamma\|=m}\frac{m!}{n_0!\cdots n_m!}\varepsilon_1^{n_1}\cdots\varepsilon_m^{n_m}Ax_0^{n_0}...x_m^{n_m},
$$

onde a soma é feita sobre todos $n_0, ..., n_m \in \mathbb{N}_0$ tais que $n_0+\cdots+n_m = m$. Portanto

$$
\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m A(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)^m = \sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m\sum_{\|\gamma\|=m}\frac{m!}{n_0!\cdots n_m!}\varepsilon_1^{n_1}\cdots\varepsilon_m^{n_m}Ax_0^{n_0}...x_m^{n_m}
$$

$$
= \sum_{\|\gamma\|=m}\frac{m!}{n_0!\cdots n_m!}Ax_0^{n_0}...x_m^{n_m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1^{n_1+1}\cdots\varepsilon_m^{n_m+1}.
$$

Se $n_i = 0$ para algum i, temos $\varepsilon_i^{n_i+1} = \varepsilon_i = \pm1$, e daí

$$
\sum_{\varepsilon_j=\pm1}\varepsilon_1^{n_1+1}\cdots\varepsilon_m^{n_m+1} =
$$

$$
= \sum_{\varepsilon_j=\pm1, j\neq i}\varepsilon_1^{n_1+1}\cdots\varepsilon_{i-1}^{n_{i-1}+1}(1)\varepsilon_{i+1}^{n_{i+1}+1}\cdots\varepsilon_m^{n_m+1} + \sum_{\varepsilon_j=\pm1, j\neq i}\varepsilon_1^{n_1+1}\cdots\varepsilon_{i-1}^{n_{i-1}+1}(-1)\varepsilon_{i+1}^{n_{i+1}+1}\cdots\varepsilon_m^{n_m+1} = 0.
$$

Logo

$$\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1^{n_1+1}\cdots\varepsilon_m^{n_m+1}\neq 0\Rightarrow n_i\neq 0 \text{ para todo } 1\leq i\leq m.$$

Note que se $n_i\neq 0$ para todo $i=1,...,m$, segue que $n_i=1$ para todo $i=1,...,m$ e $n_0=0$. Logo

$$\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1^{n_1+1}\cdots\varepsilon_m^{n_m+1}=\sum_{\varepsilon_i=\pm1}1=2^m,$$

e portanto

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m A(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)^m &= \sum_{\|\gamma\|=m}\frac{m!}{n_0!\cdots n_m!}Ax_0^{n_0}...x_m^{n_m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1^{n_1+1}\cdots\varepsilon_m^{n_m+1}\\ &= m!2^mA(x_1,...,x_m).\end{aligned}$$

■

Note que se $A\in L_s(^mE;F)$ e $B\in L_s(^mE;F)$ com $Ax^m=Bx^m$ para todo $x\in E$, então

$$A(x_1,x_2,...,x_m)=\frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1...\varepsilon_mA(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)^m$$

$$=\frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1...\varepsilon_mB(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)^m=B(x_1,x_2,...,x_m),$$

ou seja, se A e B são aplicações simétricas que coincidem na "diagonal", então coincidem em todo o domínio.

Observação 1.2.19 *Uma outra interessante e útil fórmula de polarização é a seguinte, devida a Mazur e Orlicz [20]: Se $A\in L(^mE;F)$ é simétrica, então*

$$A(x_1,...,x_m)=\frac{1}{m!}\sum_{\varepsilon_j=0,1}(-1)^{m-\Sigma\varepsilon_j}A\left(x_0+\textstyle\sum_{j=1}^m\varepsilon_jx_j\right)^m$$

para todo $x_0\in E$.

1.2.3 Ideais de Aplicações Multilineares

Como conseqüência natural da teoria de ideais de operadores, A. Pietsch [27] introduziu a noção de ideais de aplicações multilineares, que começaremos a estudar a seguir.

Definição 1.2.20 *Se $E_1,...,E_m$ são espaços normados, $A\in\mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ é dita de tipo finito se existem $n\in\mathbb{N}$, $\varphi_i^{(j)}\in E_j'$ e $b_i\in F$ com $i=1,...,n$ e $j=1,...,m$, tais que*

$$A(x_1,...,x_m)=\sum_{i=1}^n\varphi_i^{(1)}(x_1)\cdots\varphi_i^{(m)}(x_m)\,b_i.$$

O conjunto formado por essas aplicações é denotado por $\mathcal{L}_f(E_1,...,E_m;F)$. É fácil ver que $\mathcal{L}_f(E_1,...,E_m;F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$.

Note que o espaço vetorial $\mathcal{L}_f(E_1,...,E_m;F)$ satisfaz a propriedade de ideal, ou seja, se $M \in \mathcal{L}_f(E_1,...,E_m;F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j;E_j)$ com $j=1,...,m$, e $t \in \mathcal{L}(F;H)$ então $t \circ M \circ (u_1,...,u_m) \in \mathcal{L}_f(G_1,...,G_m;H)$. De fato, seja $M \in \mathcal{L}_f(E_1,...,E_m;F)$ da forma

$$M(x_1,...,x_m) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}(x_1) \cdots \varphi_i^{(m)}(x_m)\, b_i$$

e sejam $u_j \in \mathcal{L}(G_j;E_j)$ com $j=1,...,m$, e $t \in \mathcal{L}(F;H)$. Temos que

$$\begin{aligned}
t \circ M \circ (u_1,...,u_m)(x_1,...,x_m) &= t \circ M(u_1(x_1),...,u_m(x_m)) \\
&= t\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}(u_1(x_1)) \cdots \varphi_i^{(m)}(u_m(x_m))\, b_i\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} t\left(\varphi_i^{(1)}(u_1(x_1)) \cdots \varphi_i^{(m)}(u_m(x_m))\, b_i\right)\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}(u_1(x_1)) \cdots \varphi_i^{(m)}(u_m(x_m))\, t(b_i)\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i^{(1)} \circ u_1\right)(x_1) \cdots \left(\varphi_i^{(m)} \circ u_m\right)(x_m)\, t(b_i)\right),
\end{aligned}$$

com $\varphi_i^{(j)} \circ u_j \in G_j'$ e $t(b_i) \in H$. Portanto

$$t \circ M \circ (u_1,...,u_m) \in \mathcal{L}_f(G_1,...,G_m;H).$$

Definição 1.2.21 *Um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ é uma subclasse da classe de todas aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1,...,E_m$ e F, as componentes $\mathcal{M}(E_1,...,E_m;F) = \mathcal{L}(E_1,...,E_m;F) \cap \mathcal{M}$ satisfazem:*

(i) $\mathcal{M}(E_1,...,E_m;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ que contém as aplicações m-lineares de tipo finito;

(ii) A propriedade de ideal: se $A \in \mathcal{M}(E_1,...,E_m;F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j,E_j)$ para $j=1,...,m$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$, então $tA(u_1,...,u_m) \in \mathcal{M}(G_1,...,G_m;H)$.

Para cada m fixo,

$$\mathcal{M}_m = \bigcup_{E_1,...,E_m,F \text{ Banach}} \mathcal{M}(E_1,...,E_m;F)$$

é chamado de ideal de aplicações m-lineares.

Definição 1.2.22 *Um ideal normado (resp. quasi-normado) de aplicações multilineares $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um ideal de aplicações multilineares munido da função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow [0,\infty)$, tal que:*

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ restrita a $\mathcal{M}(E_1,...,E_m;F)$ é uma norma (resp. quasi-norma, com constante não dependendo dos espaços, dependendo eventualmente apenas do m) para quaisquer espaços de Banach $E_1,...,E_m$, F e todo $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{M}} = 1$, onde $id_{\mathbb{K}^m} : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}$ é dada por $id_{\mathbb{K}^m}(x_1,...,x_m) = x_1 \cdots x_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$;

(iii) Se $M \in \mathcal{M}(E_1,...,E_m;F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j,E_j)$ para $j=1,...,m$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$, então

$$\|tM(u_1,...,u_m)\|_{\mathcal{M}} \le \|t\| \, \|M\|_{\mathcal{M}} \, \|u_1\| \cdots \|u_m\|.$$

De maneira análoga, se m for um inteiro positivo fixo, sob as condições acima, dizemos que $\mathcal{M}_m$ é um ideal normado (quasi-normado) de aplicações m-lineares.

Se as componentes $\mathcal{M}(E_1, ..., E_m; F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, nós dizemos que $\mathcal{M}$ é um ideal completo de aplicações multilineares (em inglês, *Banach ideal* ou *quasi-Banach ideal*). De modo análogo se procede para $\mathcal{M}_m$.

Observação 1.2.23 *Algumas vezes, chamaremos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_m$ simplesmente de ideais de aplicações multilineares, mas o contexto deixará claro que conceito estamos usando.*

Observação 1.2.24 *As componentes de um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ ou de um ideal de aplicações m-lineares $\mathcal{M}_m$ envolverão sempre espaços de Banach sobre o mesmo corpo (fixo) $\mathbb{K}$.*

Exemplo 1.2.25 *Denotaremos por $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(E_1, ..., E_m; F)$ o fecho de $\mathcal{L}_f(E_1, ..., E_m; F)$ em $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$. Definimos*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ E_1, ..., E_m, F \text{ Banach}}} \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(E_1, ..., E_m; F)$$

e, se $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, dizemos que T é aproximável. O conjunto $(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \|\cdot\|)$ é um ideal completo de aplicações multilineares. De fato, se $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(E_1, ..., E_m; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j, E_j)$ com $j = 1, ..., m$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então existe uma seqüência $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}_f(E_1, ..., E_m; F)$ tal que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} A_k = A$ e $tA_k(u_1, ..., u_m) \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(G_1, ..., G_m; H)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} (tA_k(u_1, ..., u_m)) = t\left(\lim_{k \longrightarrow \infty} A_k(u_1, ..., u_n)\right) = tA(u_1, ..., u_m),$$

e portanto $tA(u_1, ..., u_m) \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(G_1, ..., G_m; H)$. É claro que $\|id_{\mathbb{K}^m}\| = 1$ e, se $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(E_1, ..., E_m; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j, E_j)$ com $j = 1, ..., m$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, temos

$$\|t \circ M \circ (u_1, ..., u_m)\| \leq \|t\| \|M(u_1, ..., u_m)\| \leq \|t\| \|M\| \|u_1\| \cdots \|u_m\|.$$

Todas as componentes $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(E_1, ..., E_m; F)$ de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ são de Banach, pois são subespaços fechados dos espaços de Banach $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$.

A seguir, veremos que as normas em ideais de multilineares têm comportamento semelhante ao caso de ideais de operadores (lineares).

Proposição 1.2.26 *Seja $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um ideal normado de aplicações multilineares. Então, $\|M\| \leq \|M\|_{\mathcal{M}}$ para qualquer M em $\mathcal{M}$.*

Demonstração. Sejam $M \in \mathcal{M}(E_1, ..., E_m; F)$, $\varphi \in F'$ e $x_j \in E_j$ fixos, $j = 1, ..., m$.

Para cada $j = 1, ..., m$, defina

$$R_j : \mathbb{K} \to E_j : R_j(\lambda) = \lambda x_j.$$

Temos $\|R_j\| = \|x_j\|$ e

$$\varphi \circ M \circ (R_1, ..., R_m)(\lambda_1, ..., \lambda_m) = \varphi \circ M(\lambda_1 x_1, ..., \lambda_m x_m) = \lambda_1 \cdots \lambda_m (\varphi \circ M)(x_1, ..., x_m).$$

É fácil notar que

$$\varphi \circ M \circ (R_1, ..., R_m) = (\varphi \circ M)(x_1, ..., x_m)\, id_{\mathbb{K}^m}. \tag{1.14}$$

De (1.14), temos

$$\begin{aligned}\left|(\varphi\circ M)(x_1,...,x_m)\right| &= \left|(\varphi\circ M)(x_1,...,x_m)\right| \left\|id_{\mathbb{K}^m}\right\|_{\mathcal{M}} \\ &= \left\|(\varphi\circ M)(x_1,...,x_m)\, id_{\mathbb{K}^m}\right\|_{\mathcal{M}} \\ &= \left\|\varphi\circ M\circ (R_1,...,R_m)\right\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|\varphi\| \, \|M\|_{\mathcal{M}} \, \|R_1\|\cdots\|R_m\| .\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, segue que

$$\begin{aligned}\|M(x_1,...,x_m)\| &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left|(\varphi\circ M)(x_1,...,x_m)\right| \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \|\varphi\| \, \|M\|_{\mathcal{M}} \, \|R_1\|\cdots\|R_m\| \\ &= \|M\|_{\mathcal{M}} \, \|x_1\|\cdots\|x_m\| .\end{aligned}$$

Portanto $\|M\| \leq \|M\|_{\mathcal{M}}$. ■

Se $\varphi_j \in E_j', j = 1,...,m$ e $y \in F$, para quaisquer $(x_1,...,x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ denotamos $(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_m y)(x_1,...,x_m)$ por $\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_m(x_m)\, y$.

Proposição 1.2.27 *Seja $\mathcal{M}$ um ideal normado de aplicações multilineares. Para $\varphi_j \in E_j'$, $y \in F$ e $M = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_m y \in \mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ temos*

$$\|M\|_{\mathcal{M}} = \|M\| = \|y\| \, \|\varphi_1\|\cdots\|\varphi_m\| .$$

Demonstração. Como $M(x_1,...,x_m) = \varphi_1(x_1)\cdots\varphi_m(x_m)\, y$, temos

$$\|M(x_1,...,x_m)\| = \|\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_m(x_m)\, y\| ,$$

e daí

$$\|M\| = \|y\| \, \|\varphi_1\|\cdots\|\varphi_m\| .$$

Note que

$$M = t\circ id_{\mathbb{K}^m}(\varphi_1,...,\varphi_m) ,$$

com $t \in \mathcal{L}(\mathbb{K};F)$, dada por $t(k) = ky$. Então, $M \in \mathcal{M}$, pois $id_{\mathbb{K}^m} \in \mathcal{M}$ e

$$\|M\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \, \|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{M}} \, \|\varphi_1\|\cdots\|\varphi_m\| \leq \|y\| \, \|\varphi_1\|\cdots\|\varphi_m\| .$$

Pela proposição anterior, temos

$$\|M\| \leq \|M\|_{\mathcal{M}} \leq \|y\| \, \|\varphi_1\|\cdots\|\varphi_m\| = \|M\|$$

e o resultado segue. ■

1.3 Ideais de Polinômios entre Espaços de Banach

1.3.1 Polinômios Homogêneos

Na presente seção estudaremos algumas propiedades básicas a respeito de polinômios e aplicações multilineares entre espaços de Banach, que ajudarão no estudo da teoria de ideais de polinômios entre espaços de Banach.

Definição 1.3.1 *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $P : E \longrightarrow F$ é um polinômio homogêneo de grau m (ou um polinômio m-homogêneo) se existir $A \in L(^mE;F)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$. Dizemos que P é o polinômio m-homogêneo associado a A.*

Denotamos por $P(^mE;F)$ o espaço vetorial de todos os polinômios m-homogêneos de E em F. O conjunto das funções constantes de E em F é denotado por $P(^0E;F)$. Identificamos $P(^0E;F)$ com F através da associação

$$\Psi : F \to \{\ f : E \to F;\ f \text{ é constante}\}$$
$$\Psi(a) = f \text{ dada por } f(x) = a \text{ para todo } x \in E.$$

Definição 1.3.2 *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que a função $P : E \longrightarrow F$ é um polinômio se P puder ser representado como uma soma $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_m$, onde $P_j \in P\left(^jE;F\right)$ para cada $j = 0, ..., m$. Se $P_m \neq 0$, dizemos que P é um polinômio de grau m.*

Denotamos por $P(E;F)$ o espaço vetorial de todos os polinômios de E em F. Se $F = \mathbb{K}$ escrevemos apenas $P(E)$.

Exemplo 1.3.3 *A função $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, definida por $P(x) = ax^m$, $a \in \mathbb{K}$, é um polinômio homogêneo de grau m. Basta tomar $A \in L(^m\mathbb{K})$ dada por $A(x_1, ..., x_m) = ax_1...x_m$, e temos $P(x) = Ax^m$. Note que esses são os únicos polinômios m-homogêneos de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{K}$. De fato, se $A \in L(^m\mathbb{K})$ e $x_1, ..., x_m \in \mathbb{K}$, temos*

$$A(x_1, ..., x_m) = x_1...x_m A(1, ..., 1) = ax_1...x_m,$$

com $a = A(1, ..., 1)$.

Proposição 1.3.4 *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $P \in P(^mE;F)$, então existe uma única aplicação m-linear simétrica $T \in L_s(^mE;F)$ tal que $P(x) = Tx^m$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. Pela definição de polinômio homogêneo, existe uma aplicação m-linear $A \in L(^mE;F)$, tal que $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$. Agora defina a aplicação m-linear A_s, simétrica, por

$$A_s(x_1, ..., x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}\right).$$

Logo

$$\begin{aligned} A_s x^m &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x, ..., x) = \frac{1}{m!} m! A(x, ..., x) \\ &= Ax^m = P(x). \end{aligned}$$

Se $B_s x^m = P(x)$, segue que A_s e B_s coincidem na diagonal e, pela Fórmula de Polarização, coincidem em todo o domínio; assim A_s é única. ∎

A_s é chamada de simetrização de A; denotaremos por $\hat{A}$ o polinômio homogêneo associado a A e $\check{P}$ a multilinear simétrica associada a P.

Proposição 1.3.5 *A função $A \longrightarrow \hat{A}$ é um isomorfismo (algébrico) de espaços vetoriais entre $L_s(^mE;F)$ e $P(^mE;F)$, para cada $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, para todo $A \in P\left({}^{m}E;F\right)$ existe uma única aplicação m-linear simétrica $\check{A} \in L_s\left({}^{m}E;F\right)$ tal que $A(x) = \check{A}x^m$, e portanto temos a bijeção. Agora, tomemos A_1 e A_2 em $L_s\left({}^{m}E;F\right)$ e $k \in \mathbb{K}$. Temos

$$(kA_1 + A_2)^{\wedge}(x) = (kA_1 + A_2)\, x^m = kA_1x^m + A_2x^m = \left(k\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right)(x)$$

o que mostra a linearidade. ■

Teorema 1.3.6 *Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. O espaço vetorial $P(E;F)$ é soma direta algébrica dos espaços $P\left({}^{m}E;F\right)$, $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pela definição, temos que $P = P_0 + \cdots + P_m$, com $m \in \mathbb{N}$ e $P_j \in P\left({}^{j}E;F\right)$, $j = 0, ..., m$. Seja $P \in P(E;F)$ o polinômio identicamente nulo. Suponha

$$0 = P(x) = P_0(x) + \cdots + P_m(x) \text{ para todo } x \in E.$$

Seja $r > 0$. Temos

$$P_0(rx) + \cdots + P_m(rx) = 0$$

e daí

$$r^0 P_0(x) + \cdots + r^m P_m(x) = 0.$$

Dividindo ambos os membros por r^m, obtemos

$$\frac{1}{r^m} P_0(x) + \cdots + \frac{1}{r} P_{m-1}(x) + P_m(x) = 0$$

e, fazendo $r \longrightarrow \infty$, teremos que $P_m(x) = 0$ para todo $x \in E$. Portanto

$$P(x) = P_0(x) + \cdots + P_{m-1}(x) = 0.$$

Procedendo da mesma maneira, verifica-se que $P_0(x) = \cdots = P_m(x) = 0$. Logo, se

$$P_0 + \cdots + P_m = Q_0 + \cdots + Q_m,$$

com $P_j, Q_j \in P\left({}^{j}E;F\right)$, $j = 0, ..., m$, temos $P_j = Q_j$ para todo j, e a soma é direta. ■

1.3.2 Polinômios Contínuos

Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. O subespaço de $P\left({}^{m}E;F\right)$, formado pelos polinômios m-homogêneos contínuos, será denotado por $\mathcal{P}\left({}^{m}E;F\right)$, e $\mathcal{P}(E;F)$ denotará o subespaço de $P(E;F)$ formado pelos polinômios contínuos de E em F.

O próximo teorema fornece várias equivalências sobre a continuidade de polinômios:

Teorema 1.3.7 *Sejam E e F espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$, $P \in P\left({}^{m}E;F\right)$ e $A \in L_s\left({}^{m}E;F\right)$, com $\hat{A} = P$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $A \in \mathcal{L}_s\left({}^{m}E;F\right)$;
(ii) $P \in \mathcal{P}\left({}^{m}E;F\right)$;
(iii) P é contínuo na origem;
(iv) Existe uma constante $M > 0$, tal que $\|P(x)\| \leq M\|x\|^m$, para qualquer $x \in E$;
(v) P é limitado em toda bola com raio finito;
(vi) P é limitado em alguma bola com raio finito;
(vii) Se $B \subset E$ é limitado, existe $M_B > 0$ tal que

$$\|Px - Py\| \leq M_B \|x - y\|$$

para quaisquer $x, y \in B$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Temos que $P(x) = (A \circ i)(x)$, onde $i : E \longrightarrow E^m$ é dada por $i(x) = (x, ..., x)$. Como A e i são contínuos, segue que P também é.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Se P é contínuo, em particular, P é contínuo na origem.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Se P é contínuo na origem, então dado $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in E$ com $\|x\| \leq \delta$, temos $\|P(x)\| \leq \varepsilon$. Se $x \neq 0$, como $\left\|\frac{\delta x}{\|x\|}\right\| = \delta$, temos

$$\left\|P\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right)\right\| \leq 1.$$

Logo, para todo $x \neq 0$, temos

$$\|P(x)\| \leq M \|x\|^m, \text{ com } M = \left(\frac{1}{\delta}\right)^m.$$

Se $x = 0$ a desigualdade continua válida.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Seja B uma bola com centro em $a \in E$ e raio $r > 0$. Para todo $x \in B$, temos que $\|x\| \leq \|a\| + r$. Portanto, por (iv) segue que $\|P(x)\| \leq M(\|a\| + r)^m$.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Óbvio.

$(vi) \Rightarrow (i)$ Sejam $B(a; r)$ a bola aberta de centro a e raio r, e $K > 0$ tais que $\|P(x)\| \leq K$ para todo $x \in B(a; r)$. Pela Fórmula de Polarização, com $x_0 = a$ e $x_1, ..., x_m \in B\left(0, \frac{r}{2m}\right)$, temos

$$\begin{aligned}
\|A(x_1, ..., x_m)\| &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} |\varepsilon_1| \cdots |\varepsilon_m| \|A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m\| \\
&= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\|\hat{A}(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)\right\| \\
&\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} K = \frac{K}{m!}.
\end{aligned}$$

Sejam $x_1, ..., x_m \in E$ não nulos e $y_i = \frac{x_i r}{2\|x_i\| m}$ para cada $i = 1, ..., m$. Logo

$$\frac{r^m \|A(x_1, ..., x_m)\|}{2^m m^m \|x_1\| \cdots \|x_m\|} = \|A(y_1, ..., y_m)\| \leq \frac{K}{m!},$$

e conseqüentemente

$$\|A(x_1, ..., x_m)\| \leq \frac{2^m m^m K}{r^m m!} \|x_1\| \cdots \|x_m\|.$$

Note que se algum dos x_i for nulo, teremos $A(x_1, ..., x_m) = 0$ e a desigualdade continua válida. Portanto A é contínua.

O mesmo raciocínio pode ser usado se substituírmos “bola aberta” por “bola fechada”.

$(i) \Rightarrow (vii)$ Para quaisquer $x, y \in E$, temos:

$$\begin{aligned}
\|P(y) - P(x)\| = \|Ay^m - Ax^m\| &= ||A(y, ..., y) - A(x, y, ..., y) + A(x, y, ..., y) - A(x, x, y, ...y) \\
&+ A(x, x, y, ..., y) - \cdots - A(x, ..., x, y) + A(x, ..., x, y) - A(x, ..., x)|| \\
&\leq \|A(y - x, y, ..., y)\| + \|A(x, y - x, y, ..., y)\| + \cdots + \|A(x, ..., x, y - x)\| \\
&\leq \|A\| \|y - x\| \|y\|^{m-1} + \|A\| \|x\| \|y - x\| \|y\|^{m-2} + \cdots + \|A\| \|x\|^{m-1} \|y - x\| \\
&\leq \|A\| \|y - x\| \left(\|y\|^{m-1} + \|x\| \|y\|^{m-2} + \cdots + \|x\|^{m-1}\right).
\end{aligned}$$

Agora, se $\|y\| \leq r$ e $\|x\| \leq r$, tomando $M = \|A\| (m-1) r^{m-1}$, temos

$$\begin{aligned}
\|P(y) - P(x)\| &\leq \|A\| (m-1) r^{m-1} \|y - x\| \\
&= M \|y - x\|
\end{aligned}$$

e o resultado segue.

$(vii) \Rightarrow (vi)$ Óbvio. ■

Do Teorema 1.3.7 concluímos que se $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, então

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Px\| < \infty.$$

Veremos, a seguir, que o espaço vetorial dos polinômios m-homogêneos contínuos é um espaço vetorial normado se for munido com a norma

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\|.$$

Proposição 1.3.8 *Seja $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Então*

(i) $\sup_{\|x\|=1} \|P(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\|$;

(ii) $\sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| = \inf \{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M \|x\|^m$ *para todo* $x \in E\}$;

(iii) $\|P\| = \sup_{\|x\|=1} \|P(x)\|$ *é uma norma em* $\mathcal{P}(^m E; F)$.

Demonstração. Note que

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| < \infty$$

devido ao Teorema 1.3.7.

(i) Sejam $C = \{\|P(x)\| ; \|x\| \leq 1\}$ e $D = \{\|P(x)\| ; \|x\| = 1\}$. Assim $D \subset C$, e portanto

$$\sup_{\|x\|=1} \|P(x)\| = \sup D \leq \sup C = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\|. \tag{1.15}$$

Agora, se $0 \neq x \in E$, com $\|x\| \leq 1$, então

$$\frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} = \left\| P\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup_{\|y\|=1} \|P(y)\|$$

e daí

$$\|P(x)\| \leq \left(\sup_{\|y\|=1} \|P(y)\| \right) \|x\|^m.$$

Tomando o supremo, com $\|x\| \leq 1$, obtemos

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| \leq \sup_{\|y\|=1} \|P(y)\|. \tag{1.16}$$

Portanto, de (1.15) e (1.16) temos

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| = \sup_{\|y\|=1} \|P(y)\|.$$

(ii) Seja $M > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq M \|x\|^m$ para todo $x \in E$. Se $\|x\| \leq 1$, então $\|P(x)\| \leq M$. Logo

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| \leq M$$

e segue que

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| \leq \inf \{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M \|x\|^m \text{ para todo } x \in E\}. \tag{1.17}$$

Agora vamos mostrar que

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|P(x)\| \in \{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M \|x\|^m \text{ para todo } x \in E\}.$$

Sejam $x \in E$, x não nulo, e $y = \frac{x}{\|x\|}$. Então

$$\frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} = \|P(y)\| \leq \sup_{\|y\|\leq 1} \|P(y)\|$$

e portanto

$$\|P(x)\| \leq \sup_{\|y\|\leq 1} \|P(y)\| \|x\|^m \text{ para todo } 0 \neq x \in E.$$

Caso $x = 0$, temos $P(x) = 0$, e a desigualdade continua válida. Logo

$$\sup_{\|y\|\leq 1} \|P(y)\| \in \{M \geq 0; \|P(x)\| \leq M \|x\|^m \text{ para todo } x \in E\}$$

e segue que

$$\sup_{\|y\|\leq 1} \|P(y)\| \geq \inf \{M \geq 0; \|P(x)\| \leq M \|x\|^m\}. \tag{1.18}$$

A igualdade segue de (1.17) e (1.18).

(iii) Como $\|P(x)\| \geq 0$ para todo $x \in E$, então

$$\|P\| = \sup_{\|x\|=1} \|P(x)\| \geq 0.$$

Além disso,

$$\|P\| = 0 \Rightarrow \|P(x)\| = 0 \text{ sempre que } \|x\| = 1.$$

Logo, se $0 \neq x \in E$, temos

$$\|P(x)\| = \left\| P\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \|x\|^m = 0,$$

e daí segue que $P = 0$.

Se $k \in \mathbb{K}$, para todo x em E, temos

$$\|kP\| = \sup_{\|x\|=1} \|kP(x)\| = |k| \sup_{\|x\|=1} \|P(x)\| = |k| \|P\|.$$

Finalmente, se $P, P' \in \mathcal{P}(^mE; F)$ então

$$\begin{aligned} \|P + P'\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(P + P')(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|P(x) + P'(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|P(x)\| + \sup_{\|x\|=1} \|P'(x)\| \\ &= \|P\| + \|P'\|. \end{aligned}$$

Portanto $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{P}(^mE; F)$. ■

O próximo resultado estabelece desigualdades clássicas entre as normas de $A \in \mathcal{L}_s(^mE; F)$ e $\hat{A} \in \mathcal{P}(^mE; F)$:

Teorema 1.3.9 *Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. A aplicação*

$$\Phi : \mathcal{L}_s(^mE; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^mE; F),$$

definida por $\Phi(A) = \hat{A}$, é um isomorfismo topológico. Além disso,

$$\left\|\hat{A}\right\| \leq \|A\| \leq \frac{m^m}{m!} \left\|\hat{A}\right\|.$$

Demonstração. A aplicação Φ é uma restrição da função dada na Proposição 1.3.5 (note que a imagem de Φ realmente está em $\mathcal{P}\left({}^{m}E;F\right)$ devido ao Teorema 1.3.7); portanto Φ é linear e injetiva. O Teorema 1.3.7 também garante que Φ é sobrejetiva. Logo Φ é um isomorfismo algébrico.

Temos que $\left\|\hat{A}\right\| \leq \|A\|$, pois

$$\left\|\hat{A}\left(x\right)\right\| = \|Ax^{m}\| \leq \|A\|\,\|x\|^{m}.$$

Seja $x = (x_1, ..., x_m) \in E^m$ com $\|x\| \leq 1$. Usando a Fórmula da Polarização com $x_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned}\|A(x_1,...,x_m)\| &\leq \frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left\|\hat{A}(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)\right\| \leq \frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left\|\hat{A}\right\|\|(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)\|^m\\ &\leq \frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left\|\hat{A}\right\|(\|x_1\|+\cdots+\|x_m\|)^m = \frac{1}{m!}\left\|\hat{A}\right\|(\|x_1\|+\cdots+\|x_m\|)^m\\ &\leq \frac{1}{m!}\left\|\hat{A}\right\|m^m.\end{aligned}$$

Portanto $\|A\| \leq \frac{m^m}{m!}\left\|\hat{A}\right\|$. ■

Corolário 1.3.10 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, E um espaço normado sobre $\mathbb{K}$ e F um espaço de Banach. Então $\mathcal{P}\left({}^{m}E;F\right)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Como $\mathcal{L}_s\left({}^{m}E;F\right)$ é isomorfo a $\mathcal{P}\left({}^{m}E;F\right)$, basta mostrar que $\mathcal{L}_s\left({}^{m}E;F\right)$ é Banach. Vamos mostrar que $\mathcal{L}_s\left({}^{m}E;F\right)$ é fechado, pois como $\mathcal{L}_s\left({}^{m}E;F\right) \subset \mathcal{L}\left({}^{m}E;F\right)$, e $\mathcal{L}\left({}^{m}E;F\right)$ é Banach, $\mathcal{L}_s\left({}^{m}E;F\right)$ será Banach. Seja $A \in \overline{\mathcal{L}_s\left({}^{m}E;F\right)}$. Então existe uma seqüência $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}_s\left({}^{m}E;F\right)$, tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Temos que

$$\|A_n\left(x_1,...,x_m\right) - A\left(x_1,...,x_m\right)\| = \|\left(A_n - A\right)\left(x_1,...,x_m\right)\| \leq \|A_n - A\|\,\|x_1\|\cdots\|x_m\|$$

para quaisquer $x_1, ..., x_m \in E$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$ na desigualdade acima, temos que

$$\lim_{n\to\infty} A_n\left(x_1,...,x_m\right) = A\left(x_1,...,x_m\right)$$

para quaisquer $x_1, ..., x_m \in E$. Como $A_n \in \mathcal{L}_s\left({}^{m}E;F\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, para toda permutação $\sigma \in \mathcal{S}_m$, temos

$$A_n\left(x_1,...,x_m\right) = A_n\left(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}\right).$$

Logo

$$A(x_1,...,x_m) = \lim_{n\to\infty} A_n(x_1,...,x_n) = \lim_{n\to\infty} A_n\left(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}\right) = A\left(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}\right)$$

e portanto $A \in \mathcal{L}_s\left({}^{m}E;F\right)$. ■

Quando $m = 2$ e E é espaço de Hilbert, o Teorema 1.3.9 é bastante especial:

Proposição 1.3.11 *Seja E um espaço de Hilbert. Então o isomorfismo natural $\Phi : \mathcal{L}_s\left({}^{2}E;F\right) \longrightarrow \mathcal{P}\left({}^{2}E;F\right)$ é uma isometria.*

Demonstração. Já sabemos que Φ é um isomorfismo. Sejam $A \in \mathcal{L}_s\left({}^2E;F\right)$ e $x,y \in E$. Pela Fórmula de Polarização, temos

$$\begin{aligned}
\|A(x,y)\| &= \left\| \frac{1}{2^2 2!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 A\left(\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y\right)^2 \right\| \\
&\leq \frac{1}{8} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \hat{A}\left(\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y\right) \right\| \\
&\leq \frac{1}{8} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \hat{A} \right\| \left\| \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y \right\|^2 \\
&= \frac{1}{8} \left\| \hat{A} \right\| \left(\|x+y\|^2 + \|-x-y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|-x+y\|^2 \right) \\
&= \frac{1}{8} \left\| \hat{A} \right\| \left(2\|x+y\|^2 + 2\|x-y\|^2 \right).
\end{aligned}$$

Pela Lei do Paralelogramo (veja [16]), temos

$$\|A(x,y)\| \leq \frac{1}{4} \left\| \hat{A} \right\| 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left\| \hat{A} \right\| \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right),$$

e segue que

$$\|A\| = \sup_{\|y\|,\|x\| \leq 1} \|A(x,y)\| \leq \sup_{\|y\|,\|x\| \leq 1} \frac{1}{2} \left\| \hat{A} \right\| \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right) = \left\| \hat{A} \right\|.$$

Pelo Teorema 1.3.9, temos $\|A\| = \left\| \hat{A} \right\|$. ■

Assim como para o caso multilinear, temos uma versão do Teorema da Limitação Uniforme para o caso de polinômios homogêneos, como mostra o seguinte resultado.

Teorema 1.3.12 (Teorema da Limitação Uniforme para Polinômios Homogênos) *Sejam E um espaço de Banach e F um espaço vetorial normado. Se $\{P_i\}_{i \in I}$ é uma família de polinômios m-homogêneos contínuos de E em F e*

$$\sup_{i \in I} \|P_i(x)\| < \infty \text{ para todo } x \in E, \tag{1.19}$$

então

$$\sup_{i \in I} \|P_i\| < \infty.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$A_n = \left\{ x \in E; \sup_{i \in I} \|P_i(x)\| \leq n \right\}.$$

É facil ver que cada A_n é fechado e, de (1.19), segue que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Pelo Teorema de Baire, existe um inteiro positivo n_0 tal que A_{n_0} tem interior não vazio. Sejam $int\left(A_{n_0}\right)$ o interior de A_{n_0}, $a \in int\left(A_{n_0}\right)$ e $r > 0$ tais que a bola aberta $B_E(a;r)$ está contida em A_{n_0}.

Assim,

$$\|P_i(x)\| \leq n_0$$

para todo $i \in I$ e todo $x \in B_E(a;r)$. Pelo mesmo argumento usado na demonstração $(vi) \Rightarrow (i)$ do Teorema 1.3.7, segue que

$$\|P_i(x)\| \leq \frac{2^m m^m n_0}{r^m m!} \tag{1.20}$$

para todo $i \in I$ e todo $x \in B_E(0; r)$. Portanto,

$$\sup_{i \in I} \|P_i\| < \infty.$$

$\blacksquare$

Essa demonstração também pode ser feita usando o Teorema 1.2.9 e a Fórmula de Polarização.

Corolário 1.3.13 (Teorema de Banach-Steinhaus para Polinômios Homogêneos) *Sejam E um espaço de Banach e F um espaço normado. Seja $(P_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(^m E; F)$ tal que, para cada $x \in E$, a seqüência $(P_n x)_{n=1}^{\infty}$ é convergente. Se P é o limite pontual de $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, então $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$.*

A demonstração deste corolário segue a mesma linha da demonstração do Corolário 1.2.10, usando o Teorema 1.3.12 ao invés do Teorema 1.2.9.

Teorema 1.3.14 *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. O espaço vetorial $\mathcal{P}(E; F)$ é soma direta algébrica dos espaços $\mathcal{P}\left(^i E; F\right)$, $i \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{P}(E; F)$. Vamos usar indução sobre o grau de P. Se o grau de P for zero, temos, pelo Teorema 1.3.6, que existe $P_0 \in P\left(^0 E; F\right)$ tal que $P = P_0$, e daí $P_0 \in \mathcal{P}\left(^0 E; F\right)$. Suponhamos que o teorema seja válido para todo polinômio contínuo de grau menor que $m > 0$. Seja P um polinômio contínuo de grau m. Então o polinômio

$$q(x) = P(\alpha x) - \alpha^m P(x), \text{ com } \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \alpha \neq 0,$$

é contínuo e tem grau menor que m. Podemos escrever q como

$$q(x) = P(\alpha x) - \alpha^m P(x) = \sum_{j=0}^{m} \alpha^j P_j(x) - \alpha^m \sum_{j=0}^{m} P_j(x) = \sum_{j=0}^{m} \left(\alpha^j - \alpha^m\right) P_j(x).$$

Tomando $\alpha \in \mathbb{K}$, tal que $\alpha^j - \alpha^m \neq 0$ para todo $j = 0, ..., m-1$, temos, por hipótese de indução, que cada um dos P_j com $j = 0, ..., m-1$, é contínuo. Note que $P_m = P - P_0 - \cdots - P_{m-1}$. Portanto $P = P_0 + \cdots + P_m$ com $P_j \in \mathcal{P}\left(^j E; F\right)$, $j = 0, ..., m$. $\blacksquare$

O subespaço de $\mathcal{P}(^m E; F)$ gerado pelas aplicações $P(x) = \varphi(x)^m b$, com $\varphi \in E'$ e $b \in F$, é denotado por $\mathcal{P}_f(^m E; F)$ e seus elementos são chamados de polinômios m-homogêneos de tipo finito. Denotamos por $\mathcal{P}_A(^m E; F)$ o fecho de $\mathcal{P}_f(^m E; F)$ em $\mathcal{P}(^m E; F)$, e os elementos de $\mathcal{P}_A(^m E; F)$ são chamandos de polinômios aproximáveis.

Se $A \in \mathcal{L}_f(^m E; F)$ (lembre da Definição 1.2.20), temos que

$$A(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}(x_1) \cdots \varphi_i^{(m)}(x_m) b_i,$$

com $\varphi_i^{(j)} \in E'$ e $b_i \in F$. Logo

$$\hat{A}(x) = A(x, ..., x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}(x) \cdots \varphi_i^{(m)}(x) b_i.$$

Note que $\varphi_i^{(1)}(x) \cdots \varphi_i^{(m)}(x) b_i$ pode ser escrito por uma combinação linear de certos $\varphi(x)^m b$, com $\varphi \in E'$ e $b \in F$, e portanto $\hat{A} \in \mathcal{P}_f(^m E; F)$.

Para perceber que cada $\varphi_i^{(1)}(x) \cdots \varphi_i^{(m)}(x) b_i$ pode ser de fato escrito como combinação linear de certos $\varphi(x)^m b$, observamos as seguintes igualdades:

- $(\varphi_1+\varphi_2)^2 = \varphi_1^2+\varphi_2^2+2!\varphi_1\varphi_2$
- $(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)^3 = (\varphi_1+\varphi_2)^3+(\varphi_1+\varphi_3)^3+(\varphi_2+\varphi_3)^3-\varphi_1^3-\varphi_2^3-\varphi_3^3+3!\varphi_1\varphi_2\varphi_3$
- $(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)^4$
  $= (\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)^4+(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_4)^4+(\varphi_1+\varphi_3+\varphi_4)^4+(\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)^4$
  $-(\varphi_1+\varphi_2)^4-(\varphi_1+\varphi_3)^4-(\varphi_1+\varphi_4)^4-(\varphi_2+\varphi_3)^4-(\varphi_2+\varphi_4)^4-(\varphi_3+\varphi_4)^4$
  $+\varphi_1^4+\varphi_2^4+\varphi_3^4+\varphi_4^4+4!\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4.$

O caso geral tem uma formalização muito trabalhosa e não será feito.

1.3.3 Ideais de Polinômios

A noção de ideais de polinômios é uma adaptação natural do conceito de ideais de aplicações multilineares.

Definição 1.3.15 *Um ideal de polinômios homogêneos, ou simplesmente um ideal de polinômios, é uma subclasse $\mathcal{Q}$ da classe de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach E e F, as componentes $\mathcal{Q}(^mE;F) = \mathcal{P}(^mE;F) \cap \mathcal{Q}$ satisfazem:*

(i) $\mathcal{Q}(^mE;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE;F)$ que contém os polinômios m-homogêneos de tipo finito;

(ii) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(G;E)$, $P \in \mathcal{Q}(^mE;F)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$, então $tPu \in \mathcal{Q}(^mG;H)$.

Se $m \in \mathbb{N}$ for fixado,

$$\mathcal{Q}_m := \bigcup_{E,F \text{ Banach}} \mathcal{Q}(^mE;F)$$

é chamado de ideal de polinômios m-homogêneos.

Definição 1.3.16 *Um ideal normado (resp. quasi-normado) de polinômios $\left(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}\right)$ é um ideal de polinômios munido da função $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \longrightarrow [0,\infty)$, tal que:*

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ restrita a $\mathcal{Q}(^mE;F)$ é uma norma (resp. quasi-norma, com constante não dependendo dos espaços, dependendo eventualmente apenas do m) para quaisquer espaços de Banach E e F e todo $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{Q}} = 1$, onde $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ é dada por $id_{\mathbb{K}}(x) = x^m$;

(iii) Se $u \in \mathcal{L}(G,E)$, $P \in \mathcal{Q}(^mE;F)$, e $t \in \mathcal{L}(F;H)$, então $\|tPu\|_{\mathcal{Q}} \leq \|t\| \|P\|_{\mathcal{Q}} \|u\|^m$.

Se as componentes $\mathcal{Q}(^mE;F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$, dizemos que $\mathcal{Q}$ é ideal de Banach (resp. ideal quasi-Banach) de polinômios. De modo análogo se procede para $\mathcal{Q}_m$.

1.4 Métodos da Fatoração e Linearização

Existem diferentes maneiras de construir ideais de aplicações m-lineares ou ideais de polinômios a partir de um ideal de operadores $\mathcal{I}$. A seguir, estudaremos os métodos de fatoração e linearização, que foram introduzidos em [27]. Os resultados que obteremos sobre os métodos de fatoração e linearização foram, em sua maioria, retirados de [4, 7, 8]. Entretanto, nossa exposição tem a intenção de preencher todos os detalhes, muitas vezes omitidos nas fontes originais.

1.4.1 O Método da Fatoração

Dados os ideais de operadores $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m$, uma aplicação m-linear $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$ é dita do tipo $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)$, em símbolos $A \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)(E_1, ..., E_m; F)$, se existem espaços de Banach $G_1, ..., G_m$, operadores lineares $u_j \in \mathcal{I}_j(E_j, G_j)$, $j = 1, ..., m$, e uma aplicação m-linear contínua $B \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; F)$, tais que $A = B(u_1, ..., u_m)$.

Se $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m$ são ideais normados de operadores e $A \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)(E_1, ..., E_m; F)$, definimos

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)} = \inf \|B\| \|u_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|u_m\|_{\mathcal{I}_m}$$

com o ínfimo tomado sobre todas as possíveis fatorações $A = B(u_1, ..., u_m)$ com $u_j \in \mathcal{I}_j$ e B aplicação m-linear contínua.

Veremos que $\left(\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)}\right)$ é um ideal quasi-normado de aplicações multilineares. Esse método de construir ideais de aplicações multilineares a partir de ideais de operadores é chamado de método da fatoração**.**

Teorema 1.4.1 *Se $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m$ são ideais normados de operadores, então*

$$\left(\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)}\right)$$

é um ideal quasi-normado de aplicações multilineares.

Demonstração. Sejam $M, N \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)(E_1, ..., E_m; F)$. Então, existem espaços de Banach $G_{11}, G_{12}, ..., G_{1m}, G_{21}, ..., G_{2m}$, operadores lineares $s_j \in \mathcal{I}_j(E_j; G_{1j})$, $t_j \in \mathcal{I}_j(E_j; G_{2j})$ com $j = 1, ..., m$, e aplicações multilineares contínuas $M_0 \in \mathcal{L}(G_{11}, G_{12}, ..., G_{1m}, F)$, $N_0 \in \mathcal{L}(G_{21}, G_{22}, ..., G_{2m}, F)$, tais que

$$M(x_1, ..., x_m) = M_0(s_1(x_1), ..., s_m(x_m)) \text{ e } N(x_1, ..., x_m) = N_0(t_1(x_1), ..., t_m(x_m)).$$

Defina

$$\begin{aligned} i_{1j} : G_{1j} &\longrightarrow G_{1j} \times G_{2j} \quad (j = 1, ..., m) \\ x &\longrightarrow (x, 0) \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} i_{2j} : G_{2j} &\longrightarrow G_{1j} \times G_{2j} \quad (j = 1, ..., m) \\ y &\longrightarrow (0, y). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Claramente i_{1j} e i_{2j} são lineares. Considere $u_j : E_j \longrightarrow G_{1j} \times G_{2j}$ definida por

$$u_j(x) = i_{1j} \circ s_j(x) + i_{2j} \circ t_j(x) \text{ para todo } j = 1, ..., m.$$

Como i_{1j} e i_{2j} são lineares, verifica-se facilmente que cada u_j é linear. Defina

$$B : ((G_{11} \times G_{21}) \times \cdots \times (G_{1m} \times G_{2m})) \longrightarrow F$$

por

$$B := M_0(\pi_{11}, ..., \pi_{1m}) + N_0(\pi_{21}, ..., \pi_{2m}),$$

com

$$\begin{aligned} \pi_{1j} : G_{1j} \times G_{2j} &\longrightarrow G_{1j} \\ (x, y) &\longrightarrow x \end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned} \pi_{2j} : G_{1j} \times G_{2j} &\longrightarrow G_{2j} \\ (x, y) &\longrightarrow y. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Logo B é m-linear, contínua e

$$B\left((x_1, y_1), ..., (x_m, y_m)\right) = M_0\left(x_1, ..., x_m\right) + N_0\left(y_1, ..., y_m\right),$$

e portanto

$$\begin{aligned} B\left(u_1\left(x_1\right), ..., u_m\left(x_m\right)\right) &= M_0\left(s_1\left(x_1\right), ..., s_m\left(x_m\right)\right) + N_0\left(t_1\left(x_1\right), ..., t_m\left(x_m\right)\right) \\ &= M\left(x_1, ..., x_m\right) + N\left(x_1, ..., x_m\right). \end{aligned}$$

Como $u_j \in \mathcal{I}_j\left(E_j; G_{1j} \times G_{2j}\right)$ para todo $j = 1, ..., m$, segue que

$$(M + N) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m\right)\left(E_1, ..., E_m; F\right).$$

Se $\lambda \in \mathbb{K}$, e $M \in \mathcal{L}\left(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m\right)\left(E_1, ..., E_m; F\right)$, λM pode ser escrito como

$$\lambda M\left(x_1, ..., x_m\right) = \lambda M_0\left(s_1\left(x_1\right), ..., s_m\left(x_m\right)\right),$$

onde $s_j \in \mathcal{I}_j\left(E_j; G_j\right)$ com $j = 1, ..., m$, e

$$\lambda M_0 \in \mathcal{L}\left(G_1, G_2, ..., G_m, F\right).$$

Assim, $\lambda M \in \mathcal{L}\left(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m\right)\left(E_1, ..., E_m; F\right)$ e portanto $\mathcal{L}\left(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m\right)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_m; F\right)$.

Seja $M \in \mathcal{L}\left(E_1, ..., E_m; F\right)$ de tipo finito. Logo, M é combinação linear de funções do tipo $\varphi_1 \cdots \varphi_m b$, onde $\varphi_j \in E_j'$ com $j = 1, ..., m$ e $b \in F$.

Seja $T = \varphi_1 \cdots \varphi_m b$ e defina

$$B : \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} \longrightarrow F : B\left(x_1, ..., x_m\right) = x_1 \cdots x_m b.$$

Daí

$$T\left(x_1, ..., x_m\right) = B\left(\varphi_1\left(x_1\right), ..., \varphi_m\left(x_m\right)\right) = \varphi_1\left(x_1\right) \cdots \varphi_m\left(x_m\right) b,$$

com $\varphi_j \in \mathcal{I}_j\left(E_j, \mathbb{K}\right)$ e $B \in \mathcal{L}\left(\mathbb{K}, ..., \mathbb{K}; F\right)$. Logo $T \in \mathcal{L}\left(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m\right)\left(E_1, ..., E_m; F\right)$. Como vimos que $\mathcal{L}\left(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m\right)\left(E_1, ..., E_m; F\right)$ é espaço vetorial e as aplicações de tipo finito são combinações lineares de aplicações lineares como T, segue que

$$\mathcal{L}_f\left(E_1, ..., E_m; F\right) \subset \mathcal{L}\left(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m\right)\left(E_1, ..., E_m; F\right).$$

Propriedade de ideal: Sejam $u_j \in \mathcal{L}\left(G_j; E_j\right)$ para $j = 1, ..., m$, $A \in \mathcal{L}\left(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m\right)\left(E_1, ..., E_m; F\right)$ e $t \in \mathcal{L}\left(F; H\right)$. Como $A \in \mathcal{L}\left(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m\right)\left(E_1, ..., E_m; F\right)$, existem espaços de Banach $L_1, ..., L_m$, operadores lineares $v_j \in \mathcal{I}_j\left(E_j; L_j\right)$ e $B \in \mathcal{L}\left(L_1, ..., L_m; F\right)$ tais que $A = B\left(v_1, ..., v_m\right)$. Note que

$$M = t \circ A \circ \left(u_1, ..., u_m\right) = t \circ B \circ \left(v_1, ..., v_m\right) \circ \left(u_1, ..., u_m\right).$$

Portanto $M = J\left(z_1, ..., z_m\right)$, com $z_j = v_j \circ u_j \in \mathcal{I}_j\left(G_j; L_j\right)$ e $J = t \circ B \in \mathcal{L}\left(L_1, ..., L_m; H\right)$. Assim

$$M \in \mathcal{L}\left(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m\right)\left(G_1, ..., G_m; H\right)$$

e concluímos que $\mathcal{L}\left(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m\right)$ é um ideal de aplicações multilineares.

Agora vamos verificar as condições da Definição 1.2.22.

(I) Seja $A \in \mathcal{L}\left(E_1, ..., E_m; F\right)$. Temos que

$$\|A\|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m\right)} \geq 0,$$

pois $\|B\| \geq 0$ e $\|u_j\|_{\mathcal{I}_j} \geq 0$ para todo $j = 1, ..., m$, qualquer que seja a fatoração de A. Se $A = 0$, segue claramente que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)} = 0.$$

Se $A \neq 0$ e $A = B(u_1, ..., u_m)$, então, usando a Proposição 1.1.7, temos

$$\|A\| \leq \|B\| \|u_1\| \cdots \|u_m\| \leq \|B\| \|u_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|u_m\|_{\mathcal{I}_m}.$$

Logo

$$\|A\| \leq \inf \|B\| \|u_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|u_m\|_{\mathcal{I}_m}$$

e daí segue que

$$0 \neq \|A\| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}$$

(II) Vejamos agora que

$$\|\lambda A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)} = |\lambda| \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}.$$

O caso $\lambda = 0$ é imediato. Suponhamos $\lambda \neq 0$.

Seja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)$. Se $\lambda \in \mathbb{K}$, para cada expressão $A = B(u_1, ..., u_m)$, com B aplicação m-linear contínua e $u_j \in \mathcal{I}_j$, podemos escrever $\lambda A = (\lambda B)(u_1, ..., u_m)$, e portanto

$$\begin{aligned} \|\lambda A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)} &\leq \|\lambda B\| \|u_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|u_m\|_{\mathcal{I}_m} \\ &= |\lambda| \|B\| \|u_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|u_m\|_{\mathcal{I}_m}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Como (1.25) vale para toda expressão $A = B(u_1, ..., u_m)$, com B aplicação m-linear contínua e $u_j \in \mathcal{I}_j$, segue de (1.25) que

$$\|\lambda A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)} \leq |\lambda| \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}. \tag{1.26}$$

Agora se $\lambda A = M(v_1, ..., v_m)$ com B sendo uma aplicação m-linear contínua e $v_j \in \mathcal{I}_j$ com $j = 1, ..., m$, temos $A = \frac{M}{\lambda}(v_1, ..., v_m)$. Logo

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)} \leq \left\| \frac{M}{\lambda} \right\| \|v_1\|_{\mathcal{I}_1} ... \|v_m\|_{\mathcal{I}_m},$$

e portanto

$$|\lambda| \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)} \leq \|M\| \|v_1\|_{\mathcal{I}_1} ... \|v_m\|_{\mathcal{I}_m}.$$

Pelo mesmo argumento usado anteriormente, segue que

$$|\lambda| \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)} \leq \|\lambda A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}. \tag{1.27}$$

De (1.26) e (1.27) temos $\|\lambda A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)} = |\lambda| \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}$.

Agora vejamos que $\|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}$ é uma quasi-norma.

(III) Sejam M e N em $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)(E_1, ..., E_m; F)$. Podemos supor M, N não nulas.

Dado $\varepsilon > 0$, existem espaços de Banach $G_{11}, G_{12}, ..., G_{1m}, G_{21}, ..., G_{2m}$, operadores lineares $s'_j \in \mathcal{I}_j(E_j; G_{1j})$, $t'_j \in \mathcal{I}_j(E_j; G_{2j})$ com $j = 1, ..., m$, e aplicações multilineares contínuas $M'_0 \in \mathcal{L}(G_{11}, G_{12}, ..., G_{1m}, F)$, $N'_0 \in \mathcal{L}(G_{21}, G_{22}, ..., G_{2m}, F)$, com

$$M(x_1, ..., x_m) = M'_0(s'_1(x_1), ..., s'_m(x_m)) \text{ e } N(x_1, ..., x_m) = N'_0(t'_1(x_1), ..., t'_m(x_m)),$$

tais que

$$\begin{aligned} \|M'_0\| \|s'_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|s'_m\|_{\mathcal{I}_m} &\leq (1+\varepsilon) \|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}, \\ \|N'_0\| \|t'_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|t'_m\|_{\mathcal{I}_m} &\leq (1+\varepsilon) \|N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}. \end{aligned}$$

Considere

$$s_j = \frac{s'_j}{\|s'_j\|_{\mathcal{I}_j}} \|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}^{\frac{1}{m}} \ \forall\ j = 1, ..., m$$

e

$$M_0 = \left(\frac{\|s'_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|s'_m\|_{\mathcal{I}_m}}{\|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}} \right) M'_0.$$

Então $M = M_0 (s_1, ..., s_m)$, com

$$\|M_0\| \leq 1 + \varepsilon \text{ e } \|s_j\|_{\mathcal{I}_j} = \|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}^{\frac{1}{m}} \tag{1.28}$$

para todo $j = 1, ..., m$. De modo análogo, existem

$$N_0 \in \mathcal{L}(G_{21}, G_{22}, ..., G_{2m}, F) \text{ e } t_j \in \mathcal{I}_j (E_j; G_{2j})$$

para todo $j = 1, ..., m$ com $N = N_0 (t_1, ..., t_m)$ e

$$\|N_0\| \leq 1 + \varepsilon, \|t_j\|_{\mathcal{I}_j} = \|N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}^{\frac{1}{m}} \tag{1.29}$$

para todo $j = 1, ..., m$. Em $G_{1j} \times G_{2j}$, considere a norma da soma. Sejam

$$u_j : E_j \longrightarrow G_{1j} \times G_{2j}$$

definidas por

$$u_j (x) = i_{1j} \circ s_j (x) + i_{2j} \circ t_j (x) \text{ para todo } j = 1, ..., m,$$

com i_{1j} e i_{2j} dadas em (1.21) e (1.22). Considere também

$$B : ((G_{11} \times G_{21}) \times \cdots \times (G_{1m} \times G_{2m})) \longrightarrow F$$

dada por

$$B := M_0 (\pi_{11}, ..., \pi_{1m}) + N_0 (\pi_{21}, ..., \pi_{2m}),$$

com π_{1j} e π_{2j} dadas em (1.23) e (1.24). Temos que $B(u_1, ..., u_m) = M + N$ e, como $u_j \in \mathcal{I}_j (E_j; G_{1j} \times G_{2j})$, temos

$$\|u_j\|_{\mathcal{I}_j} \leq \|i_{1j} \circ s_j\|_{\mathcal{I}_j} + \|i_{2j} \circ t_j\|_{\mathcal{I}_j} \leq \|i_{1j}\| \|s_j\|_{\mathcal{I}_j} + \|i_{2j}\| \|t_j\|_{\mathcal{I}_j} = \|s_j\|_{\mathcal{I}_j} + \|t_j\|_{\mathcal{I}_j}. \tag{1.30}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
\|B((x_1, y_1), ..., (x_m, y_m))\| &= \|M_0 (\pi_{11}, ..., \pi_{1m}) ((x_1, y_1), ..., (x_m, y_m)) \\
&\quad + N_0 (\pi_{21}, ..., \pi_{2m}) ((x_1, y_1), ..., (x_m, y_m))\| \\
&= \|M_0 (x_1, ..., x_m) + N_0 (y_1, ..., y_m)\| \\
&\leq \|M_0 (x_1, ..., x_m)\| + \|N_0 (y_1, ..., y_m)\| \\
&\leq \|M_0\| \|x_1\| \cdots \|x_m\| + \|N_0\| \|y_1\| \cdots \|y_m\| \\
&\leq (1 + \varepsilon) (\|x_1\| \cdots \|x_m\| + \|y_1\| \cdots \|y_m\|) \\
&\leq (1 + \varepsilon) (\|x_1\| + \|y_1\|) \cdots (\|x_m\| + \|y_m\|)
\end{aligned}$$

e portanto $\|B\| \leq 1 + \varepsilon$.

Por fim, note que

$$\begin{aligned}
\|M + N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)} &= \|B(u_1, ..., u_m)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)} \\
&\leq \|B\| \|u_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|u_m\|_{\mathcal{I}_m} \\
&\overset{(1.30)}{\leq} (1 + \varepsilon) \left(\|s_1\|_{\mathcal{I}_1} + \|t_1\|_{\mathcal{I}_1}\right) \cdots \left(\|s_m\|_{\mathcal{I}_m} + \|t_m\|_{\mathcal{I}_m}\right) \\
&\overset{(1.28) \text{ e } (1.29)}{\leq} (1 + \varepsilon) \left(\|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}^{\frac{1}{m}} + \|N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}^{\frac{1}{m}}\right)^m,
\end{aligned}$$

assim

$$\|M+N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)}^{\frac{1}{m}} \leq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{m}} \left(\|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)}^{\frac{1}{m}} + \|N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)}^{\frac{1}{m}}\right).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\|M+N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)}^{\frac{1}{m}} \leq \|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)}^{\frac{1}{m}} + \|N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)}^{\frac{1}{m}}.$$

Logo $\|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)}$ é uma $1/m$-norma. Pela Proposição 1.1.3, segue que $\|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)}$ é uma quasi-norma.

Finalmente, vamos investigar se temos de fato um ideal quasi-normado. Devemos calcular a norma da identidade e verificar se a norma da composição de aplicações satisfaz as propriedades exigidas.

(Norma da Aplicação $id_{\mathbb{K}^m}$). Seja

$$\begin{gathered} id_{\mathbb{K}^m} : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K} \\ id_{\mathbb{K}^m}(x_1,\ldots,x_m) = x_1 \cdots x_m. \end{gathered}$$

Note que $id_{\mathbb{K}^m} = id_{\mathbb{K}^m}(id,\ldots,id)$. Logo

$$\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)} \leq \|id_{\mathbb{K}^m}\| \, \|id\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|id\|_{\mathcal{I}_m} = 1. \tag{1.31}$$

Por outro lado, se $id_{\mathbb{K}^m} = A(u_1,\ldots,u_m)$ temos

$$1 = \|A(u_1,\ldots,u_m)\| \leq \|A\| \, \|u_1\| \cdots \|u_m\| \leq \|A\| \, \|u_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|u_m\|_{\mathcal{I}_m}.$$

Daí segue que

$$1 \leq \|id_{\mathbb{K}^m}\|. \tag{1.32}$$

Logo, de (1.31) e (1.32), segue o resultado.

(Norma da composição). Seja $M \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)(E_1,\ldots,E_m;F)$. Dado $\varepsilon > 0$, existem

$$N \in \mathcal{L}(G_1,\ldots,G_m;F) \text{ e } s_j \in \mathcal{I}_j(E_j;G_j),$$

$j = 1,\ldots,m$ com

$$M = N(s_1,\ldots,s_m) \text{ e } \|N\| \, \|s_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|s_m\|_{\mathcal{I}_m} \leq (1+\varepsilon) \|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)}.$$

Se $T \in \mathcal{L}(F;H)$ e $u_j \in \mathcal{L}(G_j;E_j)$ então

$$T \circ M(u_1,\ldots,u_m) \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)(G_1,\ldots,G_m;H).$$

Note que

$$T \circ M(u_1,\ldots,u_m) = T \circ N(s_1,\ldots,s_m)(u_1,\ldots,u_m) = (T \circ N)(s_1 \circ u_1,\ldots,s_m \circ u_m),$$

e segue que

$$\begin{aligned} \|T \circ M(u_1,\ldots,u_m)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)} &\leq \|T \circ N\| \, \|s_1 \circ u_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|s_m \circ u_m\|_{\mathcal{I}_m} \\ &\leq \|T\| \, \|N\| \, \|s_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|s_m\|_{\mathcal{I}_m} \|u_1\| \cdots \|u_m\| \\ &\leq \|T\| (1+\varepsilon) \|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)} \|u_1\| \cdots \|u_m\|. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos a desigualdade e concluímos que $\left(\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_m)}\right)$ é um ideal quasi-normado de aplicações multilineares. ■

1.4.2 O Método da Linearização

Lembre que I_i, com $i = 1,...,m$, é uma aplicação definida de $\mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ em $\mathcal{L}\left(E_i;\mathcal{L}\left(E_1,\overset{[i]}{\ldots},E_m;F\right)\right)$, dada por

$$I_i(A)(x_i)\left(x_1,\overset{[i]}{\ldots},x_m\right) = A(x_1,...,x_m).$$

Dados os ideais de operadores $\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m$, uma aplicação m-linear $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ é dita do tipo $[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]$, em símbolos $A \in [\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m](E_1,...,E_m;F)$, se $I_i(A) \in \mathcal{I}_i\left(E_i;\mathcal{L}\left(E_1,\overset{[i]}{\ldots},E_m;F\right)\right)$, para todo $i = 1,...,m$.

Se $\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m$ são ideais normados de operadores e $A \in [\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m](E_1,...,E_m;F)$, definimos

$$\|A\|_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]} = \max\left\{\|I_1(A)\|_{\mathcal{I}_1},...,\|I_m(A)\|_{\mathcal{I}_m}\right\}.$$

Veremos que $\left([\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m],\|\cdot\|_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]}\right)$ é um ideal normado de aplicações multilineares. Esse método de construir ideais de aplicações multilineares a partir de ideais de operadores é chamado de método da linearização.

Teorema 1.4.2 *Se $\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m$ são ideais normados de operadores, então $\left([\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m],\|\cdot\|_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]}\right)$ é um ideal normado de aplicações multilineares.*

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que $[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]$ é um ideal de aplicações multilineares. Se $A,B \in [\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m](E_1,...,E_m;F)$, então $I_i(A), I_i(B) \in \mathcal{I}_i\left(E_i;\mathcal{L}\left(E_1,\overset{[i]}{\ldots},E_m;F\right)\right)$ para todo $i = 1,...,m$. Como $\mathcal{I}_i\left(E_i;\mathcal{L}\left(E_1,\overset{[i]}{\ldots},E_m;F\right)\right)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}\left(E_i;\mathcal{L}\left(E_1,\overset{[i]}{\ldots},E_m;F\right)\right)$, temos que

$$I_i(A) + \lambda I_i(B) \in \mathcal{I}_i\left(E_i;\mathcal{L}\left(E_1,\overset{[i]}{\ldots},E_m;F\right)\right)$$

para todo $i = 1,...,m$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Como I_i é linear, segue que

$$I_i(A + \lambda B) \in \mathcal{I}_i\left(E_i;\mathcal{L}\left(E_1,\overset{[i]}{\ldots},E_m;F\right)\right).$$

Logo $A + \lambda B \in [\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m](E_1,...,E_m;F)$.

Seja $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ com $A = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_m b$, onde $\varphi_j \in E_j'$ com $j = 1,...,m$ e $b \in F$. Note que, para cada $i = 1,...,m$, temos

$$I_i(A) : E_i \longrightarrow \mathcal{L}\left(E_1,\overset{[i]}{\ldots},E_m;F\right) : I_i(A)(x) = \varphi_i(x)\varphi_1 \otimes \overset{[i]}{\cdots} \otimes \varphi_m b.$$

Logo $I_i(A)$ é de posto finito e conseqüentemente

$$I_i(A) \in \mathcal{I}_i\left(E_i;\mathcal{L}\left(E_1,\overset{[i]}{\ldots},E_m;F\right)\right).$$

Logo

$$A \in [\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m](E_1,...,E_m;F).$$

Como todas as aplicações multilineares de tipo finito são combinações lineares de aplicações como A, segue que $[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m](E_1,...,E_m;F)$ contém todas as aplicações multilineares de tipo finito.

Propriedade de ideal: Sejam $u_j \in \mathcal{L}(G_j;E_j)$ para $j = 1,...,m$, $A \in [\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m](E_1,...,E_m;F)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$. Defina, para cada $i = 1,...,m$,

$$\psi_i : \mathcal{L}\left(E_1,\overset{[i]}{\ldots},E_m;F\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left(G_1,\overset{[i]}{\ldots},G_m;H\right) : \psi_i(R) = t \circ R\left(u_1,\overset{[i]}{\ldots},u_m\right).$$

Note que ψ_i é linear. Com efeito, se $R, S \in \mathcal{L}\left(E_1, \overset{[i]}{\ldots}, E_m; F\right)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned}\psi_i(R+\lambda S) &= t \circ (R+\lambda S)\left(u_1, \overset{[i]}{\ldots}, u_m\right) = t\left(R\left(u_1, \overset{[i]}{\ldots}, u_m\right) + \lambda S\left(u_1, \overset{[i]}{\ldots}, u_m\right)\right) \\ &= t \circ R\left(u_1, \overset{[i]}{\ldots}, u_m\right) + \lambda t \circ S\left(u_1, \overset{[i]}{\ldots}, u_m\right) = \psi_i(R) + \lambda \psi_i(S).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\|\psi_i\| \leq \|t\| \|u_1\| \overset{[i]}{\cdots} \|u_m\|. \tag{1.33}$$

Para cada $i = 1, ..., m$, temos

$$\begin{aligned}&\psi_i\left(I_i(A)(u_i(x_i))\right)\left(x_1, \overset{[i]}{\ldots}, x_m\right) \\ &= t \circ \left(I_i(A)(u_i(x_i))\right)\left(u_1(x_1), \overset{[i]}{\ldots}, u_m(x_m)\right) \\ &= t\left(A\left(\left(u_1(x_1), ..., u_m(x_m)\right)\right)\right) \\ &= I_i\left(t \circ A(u_1, ..., u_m)\right)(x_i)\left(x_1, \overset{[i]}{\ldots}, x_m\right).\end{aligned}$$

Logo

$$\left(\psi_i \circ I_i(A) \circ u_i\right)(x_i) = \psi_i\left(I_i(A)(u_i(x_i))\right) = I_i\left(t \circ A(u_1, ..., u_m)\right)(x_i)$$

e então

$$I_i\left(t \circ A(u_1, ..., u_m)\right) = \psi_i \circ I_i(A) \circ u_i \in \mathcal{I}_i\left(G_i; \mathcal{L}\left(G_1, \overset{[i]}{\ldots}, G_m; H\right)\right), \tag{1.34}$$

para todo $i = 1, ..., m$, pois $I_i(A) \in \mathcal{I}_i\left(E_i; \mathcal{L}\left(E_1, \overset{[i]}{\ldots}, E_m; F\right)\right)$ para todo $i = 1, ..., m$.

Agora vamos verificar as condições da Definição 1.2.22.

$(i1)$ Note que

$$\begin{aligned}\|A\|_{[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]} = 0 &\Leftrightarrow \|I_i(A)\|_{\mathcal{I}_i} = 0, \ \forall i = 1, ..., m \\ &\Leftrightarrow I_i(A) = 0, \ \forall i = 1, ..., m \\ &\Leftrightarrow A = 0.\end{aligned}$$

$(i2)$ Para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}\|\lambda A\|_{[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]} &= \max\left\{\|I_1(\lambda A)\|_{\mathcal{I}_1}, \ldots, \|I_m(\lambda A)\|_{\mathcal{I}_m}\right\} \\ &= \max|\lambda|\left\{\|I_1(A)\|_{\mathcal{I}_1}, \ldots, \|I_m(A)\|_{\mathcal{I}_m}\right\} = |\lambda| \|A\|_{[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]}.\end{aligned}$$

$(i3)$ Sejam A e B em $[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m](E_1, ..., E_m; F)$. Então

$$\begin{aligned}\|A+B\|_{[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]} &= \max\left\{\|I_1(A+B)\|_{\mathcal{I}_1}, \ldots, \|I_m(A+B)\|_{\mathcal{I}_m}\right\} \\ &= \max\left\{\|I_1(A) + I_1(B)\|_{\mathcal{I}_1}, \ldots, \|I_m(A) + I_m(B)\|_{\mathcal{I}_m}\right\} \\ &\leq \max\left\{\|I_1(A)\|_{\mathcal{I}_1} + \|I_1(B)\|_{\mathcal{I}_1}, \ldots, \|I_m(A)\|_{\mathcal{I}_m} + \|I_m(B)\|_{\mathcal{I}_m}\right\} \\ &\leq \max\left\{\|I_1(A)\|_{\mathcal{I}_1}, \ldots, \|I_m(A)\|_{\mathcal{I}_m}\right\} + \max\left\{\|I_1(B)\|_{\mathcal{I}_1}, \ldots, \|I_m(B)\|_{\mathcal{I}_m}\right\} \\ &= \|A\|_{[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]} + \|B\|_{[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]}.\end{aligned}$$

(ii) Note que $I_1(id_{\mathbb{K}^m}) = r \circ id_{\mathbb{K}}$, com

$$\begin{aligned}r : \mathbb{K} &\to \mathcal{L}\left({}^{m-1}\mathbb{K}; \mathbb{K}\right) \\ x &\longmapsto x id_{\mathbb{K}^{m-1}}.\end{aligned}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} r \circ id_{\mathbb{K}}(x_1)(x_2,...,x_m) &= r(id_{\mathbb{K}}(x_1))(x_2,...,x_m) = r(x_1)(x_2,...,x_m) \\ &= x_1 id_{\mathbb{K}^{m-1}}(x_2,...,x_m) = x_1 x_2 \cdots x_m \\ &= I_1(id_{\mathbb{K}^m})(x_1)(x_2,...,x_m). \end{aligned}$$

Logo, como $\|r\| = 1$, temos

$$\|I_1(id_{\mathbb{K}^m})\|_{\mathcal{I}_1} = \|r \circ id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}_1} \leq \|r\| \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}_1} = 1.$$

Por outro lado, como $I_1(id_{\mathbb{K}^m}) \in \mathcal{I}_1(\mathbb{K}, \mathcal{L}(^{m-1}\mathbb{K}; \mathbb{K}))$, temos, da Proposição 1.1.7, que

$$\|I_1(id_{\mathbb{K}^m})\|_{\mathcal{I}_1} \geq \|I_1(id_{\mathbb{K}^m})\| = 1$$

e daí segue que

$$\|I_1(id_{\mathbb{K}^m})\|_{\mathcal{I}_1} = 1.$$

De modo análogo, teremos que $\|I_j(id_{\mathbb{K}^m})\|_{\mathcal{I}_j} = 1$ para todo $j = 2, ..., m$, e portanto

$$\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]} = 1.$$

(iii) Sejam $t \in \mathcal{L}(F; H)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ e $A \in [\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m](E_1, ..., E_m; F)$. Temos

$$\begin{aligned} &\|I_i(t \circ A(u_1, ..., u_m))\|_{\mathcal{I}_i} \\ &\overset{(1.34)}{=} \|\psi_i \circ I_i(A) \circ u_i\|_{\mathcal{I}_i} \\ &\leq \|\psi_i\| \|I_i(A)\|_{\mathcal{I}_i} \|u_i\| \\ &\overset{(1.33)}{\leq} \left(\|t\| \|u_1\| \overset{[i]}{\cdots} \|u_m\|\right) \|I_i(A)\|_{\mathcal{I}_i} \|u_i\|. \\ &= \|t\| \|I_i(A)\|_{\mathcal{I}_i} \|u_1\| \cdots \|u_m\|. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|t \circ A(u_1, ..., u_m)\|_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]} &= \max\left\{\|I_j(t \circ A(u_1, ..., u_m))\|_{\mathcal{I}_j}, j = 1, ..., m\right\} \\ &\leq \max\left\{\|t\| \|I_j(A)\|_{\mathcal{I}_j} \|u_1\| \cdots \|u_m\|, j = 1, ..., m\right\} \\ &= \|t\| \max\left\{\|I_j(A)\|_{\mathcal{I}_j}, j = 1, ..., m\right\} \|u_1\| \cdots \|u_m\| \\ &= \|t\| \|A\|_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]} \|u_1\| \cdots \|u_m\|. \end{aligned}$$

Portanto $\left([\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m], \|\cdot\|_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]}\right)$ é um ideal normado de aplicações multilineares. ■

1.4.3 Relação de Inclusão entre os Métodos de Fatoração e Linearização

A seguir, veremos que os métodos de linearização e fatoração respeitam uma relação de inclusão.

Proposição 1.4.3 *Sejam $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m$ ideais normados de operadores lineares. Então*

$$\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m) \subset [\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]$$

e

$$\|\cdot\|_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}.$$

Demonstração. Seja $M \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)(E_1, ..., E_m; F)$. Para $\varepsilon > 0$, escolha $M_0 \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; F)$ e $t_j \in \mathcal{I}_j(E_j; G_j)$ com

$$M = M_0(t_1, ..., t_m) \text{ e } \|M_0\| \|t_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|t_m\|_{\mathcal{I}_m} \leq (1+\varepsilon)\|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}. \tag{1.35}$$

Defina, para cada $j = 1, ..., m$,

$$\Psi_j : G_j \longrightarrow \mathcal{L}\left(E_1, \overset{[j]}{\ldots}, E_m; F\right) : \Psi_j(z)\left(x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m\right) = M_0(t_1(x_1), ..., z, ..., t_m(x_m)).$$

Note que

$$\|\Psi_j\| \leq \|M_0\| \|t_1\| \overset{[j]}{\cdots} \|t_m\|. \tag{1.36}$$

Temos que

$$\begin{aligned}(\Psi_j \circ t_j)(x_j)\left(x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m\right) &= \Psi_j(t_j(x_j))\left(x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m\right) = M_0(t_1(x_1), ..., t_m(x_m)) \\ &= I_j(M_0(t_1, ..., t_m))(x_j)\left(x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m\right).\end{aligned}$$

Logo $(\Psi_j \circ t_j) = I_j(M)$ e, como $t_j \in \mathcal{I}_j(E_j; G_j)$ para todo $j = 1, ..., m$, segue que

$$I_j(M) \in \mathcal{I}_j\left(E_j; \mathcal{L}\left(E_1, \overset{[j]}{\ldots}, E_m; F\right)\right)$$

para todo $j = 1, ..., m$. Note ainda que

$$\begin{aligned}\|I_j(M)\|_{\mathcal{I}_j} = \|\Psi_j \circ t_j\|_{\mathcal{I}_j} \leq \|\Psi_j\| \|t_j\|_{\mathcal{I}_j} &\overset{(1.36)}{\leq} \left(\|M_0\| \|t_1\| \overset{[j]}{\cdots} \|t_m\|\right) \|t_j\|_{\mathcal{I}_j} \\ = \|M_0\| \|t_1\|_{\mathcal{I}_m} \cdots \|t_m\|_{\mathcal{I}_m} &\overset{(1.35)}{\leq} (1+\varepsilon)\|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}.\end{aligned}$$

Portanto, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\|M\|_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]} \leq \|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}.$$

■

1.5 Ideais de Polinômios gerados por Ideais de Aplicações Multilineares

Se $m \geq 1$, denotaremos a classe de todos os polinômios m-homogêneos contínuos entre espaços de Banach por $\mathcal{P}^m$.

Definição 1.5.1 *Seja $\mathcal{M}$ um ideal quasi-normado de aplicações multilineares. A classe*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = \left\{P \in \mathcal{P}^m; \check{P} \in \mathcal{M}, m \in \mathbb{N}\right\},$$

com $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} := \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}}$, é chamda de ideal de polinômios gerado pelo ideal $\mathcal{M}$.

Vejamos que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é de fato um ideal de polinômios:

Proposição 1.5.2 *Seja $\mathcal{M}$ um ideal de Banach de aplicações multilineares. Então $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é um ideal de Banach de polinômios.*

Demonstração. Sejam E, F espaços de Banach, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)$ e $k \in \mathbb{K}$. Então $\check{P}_1, \check{P}_2 \in \mathcal{M}\left({}^m E; F\right)$. Como $\mathcal{M}\left({}^m E; F\right)$ é um ideal temos que $\check{P}_1 + k\check{P}_2 \in \mathcal{M}\left({}^m E; F\right)$. Daí,

$$(P_1 + kP_2)^{\vee} = \check{P}_1 + k\check{P}_2 \in \mathcal{M}\left({}^m E; F\right)$$

e portanto

$$P_1 + kP_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right).$$

Se P é um polinômio m-homogêneo de tipo finito, claramente $\check{P}$ é de tipo finito e então $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right).$

Vamos verificar a propriedade de ideal:

Sejam $u \in \mathcal{L}(G, E)$, $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Veja que

$$t\check{P}(u, ..., u)(x, ..., x) = t\check{P}(u(x), ..., u(x)) = tPu(x) = (tPu)^{\vee}(x, ..., x).$$

Segue que

$$(tPu)^{\vee} = t\check{P}(u, ..., u) \in \mathcal{M}\left({}^m E; F\right) \tag{1.37}$$

e portanto

$$tPu \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m G; H\right).$$

Note que $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}$ restrita a $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)$ é uma norma. De fato,

(i) Seja $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)$. Como $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} := \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}}$, temos que $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \geq 0$ para qualquer $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)$.

(ii) Sejam $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então $\|\lambda P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|A\|_{\mathcal{M}}$ com $A = \lambda\check{P}$. Segue que

$$\|\lambda P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \left\|\lambda\check{P}\right\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}.$$

(iii) Sejam $P, Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)$. Então $\|P + Q\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|A\|_{\mathcal{M}}$, com $A = \check{P} + \check{Q}$ e portanto

$$\|P + Q\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \left\|\check{P} + \check{Q}\right\|_{\mathcal{M}} \leq \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}} + \left\|\check{Q}\right\|_{\mathcal{M}} = \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} + \|Q\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}.$$

Agora vamos determinar a norma da identidade de $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)$. Para isso, note que $(id_{\mathbb{K}})^{\vee} = id_{\mathbb{K}^m}$. Assim

$$\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{M}} = 1.$$

Sejam $t \in \mathcal{L}(F; H)$, $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)$ e $u \in \mathcal{L}(G, E)$. De (1.37) segue que

$$\|tPu\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \left\|t\check{P}(u, ..., u)\right\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}} \|u\|^m = \|t\| \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \|u\|^m.$$

Como $\mathcal{M}$ é um ideal de Banach e como

$$^{\vee} : \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right) \longrightarrow \mathcal{M}\left({}^m E; F\right) : P \longrightarrow \check{P}$$

é uma isometria sobre a imagem, para provar que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)$ é Banach basta mostrar que

$$^{\vee}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)\right)$$

é fechada em $\mathcal{M}\left({}^m E; F\right)$. Mas isso não é difícil de verificar. Com efeito, se

$$^{\vee}(P_n) \longrightarrow A \in \mathcal{M}\left({}^m E; F\right)$$

na norma de $\mathcal{M}$, então $\left\|\check{P}_n - A\right\|_{\mathcal{M}} \to 0$. Logo, como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, temos $\left\|\check{P}_n - A\right\| \to 0$. Como $\mathcal{L}_s\left({}^m E; F\right)$ é fechado em $\mathcal{L}\left({}^m E; F\right)$, segue que $A \in \mathcal{L}_s\left({}^m E; F\right)$. Logo $\hat{A} \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)$, pois $\left(\hat{A}\right)^{\vee} = A \in \mathcal{M}\left({}^m E; F\right)$. Portanto $A = {}^{\vee}\left(\hat{A}\right) \in {}^{\vee}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)\right)$. Segue que $^{\vee}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\left({}^m E; F\right)\right)$ é fechada e portanto $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é um ideal de Banach de polinômios. ■

Observação 1.5.3 *A Proposição 1.5.2 pode ser naturalmente adaptada para espaços quasi-Banach.*

A seguir, se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, usaremos a notação $[\mathcal{I}] = [\mathcal{I}, ..., \mathcal{I}]$.

Proposição 1.5.4 *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal normado de operadores e $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$. Então $P \in \mathcal{P}_{[\mathcal{I}]}(^mE; F)$ se, e somente se, o operador linear*

$$\bar{P} : E \longrightarrow \mathcal{P}\left(^{m-1}E; F\right) : \bar{P}(x)(y) = \check{P}(x, y, ..., y)$$

pertence a $\mathcal{I}$.

Demonstração. Se $P \in \mathcal{P}_{[\mathcal{I}]}(^mE; F)$, então

$$I\left(\check{P}\right) \in \mathcal{I}\left(E; \mathcal{L}\left(^{m-1}E; F\right)\right).$$

Defina

$$M : \mathcal{L}\left(^{m-1}E; F\right) \longrightarrow \mathcal{P}\left(^{m-1}E; F\right) : M(A) = \hat{A}$$

Daí

$$M \circ I\left(\check{P}\right) : E \longrightarrow \mathcal{P}\left(^{n-1}E; F\right)$$

é tal que

$$\begin{aligned} \left(M \circ I\left(\check{P}\right)\right)(x)(y) &= \left(M\left(I\left(\check{P}\right)(x)\right)\right)(y) \\ &= \left(\widehat{I\left(\check{P}\right)(x)}\right)(y) \\ &= I\left(\check{P}\right)(x)(y, ..., y) = \check{P}(x, y, ..., y) = \bar{P}(x)(y), \end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in E$. Logo $M \circ I\left(\check{P}\right) = \bar{P}$, e portanto $\bar{P} \in \mathcal{I}$.

Reciprocamente, suponha $\bar{P} \in \mathcal{I}$.

Defina

$$N : \mathcal{P}\left(^{m-1}E; F\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left(^{m-1}E; F\right) : N(Q) = \check{Q}.$$

Daí

$$N \circ \bar{P} : E \longrightarrow \mathcal{L}\left(^{m-1}E; F\right)$$

é tal que

$$\begin{aligned} \left(N \circ \bar{P}\right)(x)(y_1, ..., y_{m-1}) &= \left(\bar{P}(x)\right)^{\vee}(y_1, ..., y_{m-1}) \\ &= \check{P}(x, y_1, ..., y_{n-1}) \\ &= I\left(\check{P}\right)(x)(y_1, ..., y_{m-1}). \end{aligned}$$

Logo

$$N \circ \bar{P} = I(\check{P}).$$

Como $\bar{P} \in \mathcal{I}$, temos $I\left(\check{P}\right) \in \mathcal{I}\left(E; \mathcal{L}\left(^{m-1}E; F\right)\right)$, e portanto

$$\check{P} \in [\mathcal{I}, ..., \mathcal{I}].$$

Assim, segue que $P \in \mathcal{P}_{[\mathcal{I}]}(^mE; F)$. ■

É fácil ver que também há uma inclusão natural para os ideais de polinômios gerados pelos métodos da fatoração e linearização.

Proposição 1.5.5 *Sejam $\mathcal{I}_i$ ideais normados de operadores, $i = 1, ..., m$. Então*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)} \subset \mathcal{P}_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]}$$

e

$$\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}}.$$

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}$. Então $\check{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)$ e, pela Proposição 1.4.3, temos $\check{P} \in [\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]$. Logo $P \in \mathcal{P}_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]}$. Ainda pela Proposição 1.4.3, temos

$$\|P\|_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]} = \left\|\check{P}\right\|_{[\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m]} \leq \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)} = \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)}}.$$

■

O seguinte resultado mostra que o método da fatoração para polinômios pode ser visto sob várias formas diferentes, porém equivalentes:

Proposição 1.5.6 *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores e $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma aplicação m-linear $A \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(^m E; F)$ tal que $\hat{A} = P$;

(ii) Existem um espaço de Banach G, um operador linear $u \in \mathcal{I}(E; G)$ e um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^m G; F)$ tais que $P = Qu$;

(iii) $\check{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(^m E; F)$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Como $A \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(^m E; F)$, então existem espaços de Banach $G_1, ..., G_m$, operadores lineares $u_j \in \mathcal{I}(E, G_j)$, $j = 1, ..., m$, e uma aplicação linear contínua $B \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; F)$ com $A = B(u_1, ..., u_m)$. Considere $G = G_1 \times \cdots \times G_m$ e defina o operador linear

$$u : E \longrightarrow G$$
$$u(x) = (u_1(x), ..., u_m(x)).$$

Sejam $i_j : G_j \longrightarrow G$ dados por $i_j(x) = (0, ..., 0, x, 0, ..., 0)$, onde o x aparece na j-ésima entrada. Então

$$u = \sum_{j=1}^{m} i_j u_j.$$

Como $u_j \in \mathcal{I}(E, G_j)$ para todo $j = 1, ..., m$, então $i_j u_j \in \mathcal{I}(E, G)$ para todo $j = 1, ..., m$. Temos também que $\mathcal{I}(E, G)$ é subespaço de $\mathcal{L}(E, G)$, e portanto

$$u = \sum_{j=1}^{m} i_j u_j \in \mathcal{I}(E, G).$$

Agora defina $Q : G \longrightarrow F$ por

$$Q((y_1, ..., y_m)) = B(y_1, ..., y_m)$$

e $T : G^m \longrightarrow E$ por

$$T\left(\left(y_1^{(1)}, ..., y_m^{(1)}\right), ..., \left(y_1^{(m)}, ..., y_m^{(m)}\right)\right) = B\left(y_1^{(1)}, ..., y_m^{(m)}\right).$$

Note que T é claramente m-linear e contínua, e $\hat{T} = Q$, pois se $y = (y_1, ..., y_m)$, temos

$$\hat{T}((y, ..., y)) = B(y_1, ..., y_m) = Q(y)$$

Portanto $Q \in \mathcal{P}(^m G; F)$ com

$$P(x) = \hat{A}(x) = A(x, ..., x) = B(u_1(x), ..., u_m(x)) = B(u(x)) = Q(u(x)),$$

e conseqüentemente $P = Qu$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Pela Fórmula da Polarização temos

$$\begin{aligned}
\check{P}(x_1, ..., x_m) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m) \\
&= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m Q(u(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)) \\
&= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m Q(\varepsilon_1 u(x_1) + \cdots + \varepsilon_m u(x_m)) \\
&= \check{Q}(u(x_1), ..., u(x_m)) \\
&= \check{Q}(u, ..., u)(x_1, ..., x_m),
\end{aligned}$$

com $u \in \mathcal{I}(E, G)$ e $\check{Q} \in \mathcal{L}(^m G, F)$. Portanto $\check{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(^m E; F)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Como $\check{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(^m E; F)$, tome $A = \check{P}$. Então $A \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(^m E; F)$ e $\hat{A} = \hat{\check{P}} = P$. ■

Capítulo 2

Ideais Simétricos

Em [14], K. Floret e D. García introduziram a noção de ideais simétricos de aplicações multilineares. Neste capítulo forneceremos exemplos e contra exemplos de ideais simétricos e investigamos a simetria dos ideais $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)$ e $[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]$, onde cada $\mathcal{I}_j$ é um ideal de operadores.

Lembre-se que se $A \in \mathcal{L}(^m E; F)$, a aplicação m-linear simétrica asociada a A é dada por

$$A_s(x_1, ..., x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}\right).$$

A referência básica desse capítulo é o artigo [6].

Definição 2.0.7 *Um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ é simétrico se $A_s \in \mathcal{M}(^m E; F)$ sempre que $A \in \mathcal{M}(^m E; F)$.*

Ideais simétricos são comuns. Por exemplo, o ideal das aplicações multilineares de tipo finito é um ideal simétrico. A seguir damos um exemplo de um ideal que não é simétrico.

2.1 Exemplo de um ideal não-simétrico

Seja E um espaço vetorial normado. Uma seqüência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$ é dita fracamente absolutamente somável quando, para cada $\varphi \in E'$, a série $\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|$ converge. Denotamos por $l_1^w(E)$ o conjunto das seqüências fracamente absolutamente somáveis.

Um operador linear $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é dito absolutamente 1-somante se $(u(x_j))_{j=1}^{\infty}$ for absolutamente somável em F sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(E)$. A teoria de operadores absolutamente somantes será detalhada no Capítulo 3.

Uma aplicação bilinear $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ diz-se absolutamente $(1; 1, \infty)$-somante quando $(A(x_j, y_j))_{j=1}^{\infty}$ for absolutamente somável em F sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(E_1)$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ for limitada em E_2.

A classe de todas as aplicações bilineares contínuas absolutamente $(1; 1, \infty)$-somantes entre espaços de Banach é um ideal de aplicações bilineares, e nós denotamos por $\mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}$.

Vamos primeiro mostrar que $\mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}(E_1, E_2; F)$ é subespaço de $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. Para isso, tomemos $A, B \in \mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}(E_1, E_2; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|(A + \lambda B)(x_j, y_j)\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|A(x_j, y_j) + \lambda B(x_j, y_j)\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|A(x_j, y_j)\| + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \|B(x_j, y_j)\|.$$

Como $A, B \in \mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}(E_1, E_2; F)$, segue que $\sum_{j=1}^{\infty} \|(A + \lambda B)(x_j, y_j)\|$ é convergente sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(E_1)$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ for limitada em E_2. Logo $A + \lambda B \in \mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}(E_1, E_2; F)$ e portanto $\mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}(E_1, E_2; F)$ é subespaço de $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$.

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}(E_1, E_2; F)$ contém as bilineares de tipo finito. Seja $A \in \mathcal{L}_f(E_1, E_2; F)$. Então A é combinação linear finita de aplicações do tipo $B(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y) b$, com $\varphi_1 \in E_1', \varphi_2 \in E_2'$ e $b \in F$. Segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|B(x_j, y_j)\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_1(x_j)\varphi_2(y_j) b\| \leq \|b\| \|\varphi_2\| \left(\sup_j \|y_j\|\right) \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_1(x_j)| < \infty, \tag{2.1}$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(E_1)$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ for limitada em E_2. Como $\mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}(E_1, E_2; F)$ é um subespaço vetorial, segue de (2.1) que $\mathcal{L}_f(E_1, E_2; F) \subset \mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}(E_1, E_2; F)$.

Resta apenas mostrar que $\mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}$ satisfaz a propriedade de ideal. Sejam $A \in \mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}(E_1, E_2; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, $j = 1, 2$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Observe que, se $u \in \mathcal{L}(G_1; E_1)$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(G_1)$, então $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(E_1)$. Com efeito, para qualquer $\varphi \in E'$, como $\varphi \circ u \in G_1'$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(u(x_j))| = \sum_{j=1}^{\infty} |(\varphi \circ u)(x_j)| < \infty,$$

e assim $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(E_1)$. O mesmo vale para l_∞ no lugar de l_1^w. Segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|t \circ A \circ (u_1, u_2)(x_j, y_j)\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|t \circ A(u_1(x_j), u_2(y_j))\| \leq \|t\| \sum_{j=1}^{\infty} \|A(u_1(x_j), u_2(y_j))\| < \infty,$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(G_1)$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada em G_2. Logo $t \circ A \circ (u_1, u_2) \in \mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}(G_1, G_2; H)$ e portanto $\mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}$ é um ideal.

Exemplo 2.1.1 *O ideal $\mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}$ não é simétrico. Defina*

$$A : l_\infty \times l_\infty \longrightarrow l_\infty : A(z, y) := z_1 u(y),$$

com $z = (z_j)_{j=1}^{\infty} \in l_\infty$ e $u : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ um operador linear limitado que não é absolutamente 1-somante (por exemplo, a identidade). Vejamos que A é absolutamente $(1;1,\infty)$-somante. Observe que, se $x_j = \left(x_j^i\right)_{i=1}^{\infty} \in l_\infty$ e

$$\varphi : l_\infty \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi((z_k)_{k=1}^{\infty}) = z_1,$$

então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|A(x_j, y_j)\| = \sum_{j=1}^{\infty} \left\|x_j^1 u(y_j)\right\| \leq \|u\| \left(\sup_j \|y_j\|\right) \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(1)}\right|$$

$$= \|u\| \left(\sup_j \|y_j\|\right) \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \infty,$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(l_\infty)$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada em l_∞.

Seja $A^t \in \mathcal{L}\left({}^2 l_\infty, l_\infty\right)$ definida por $A^t(x, y) := A(y, x)$. Escolha $y_j = (1, 1, ...)$ para todo j. Como u não é absolutamente 1-somante, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|A^t(x_j, y_j)\right\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|A(y_j, x_j)\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|1 u(x_j)\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|u(x_j)\| = \infty,$$

para alguma seqüência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(l_\infty)$. Como $A_s = \frac{A + A^t}{2}$, temos $A_s \notin \mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}\left({}^2 l_\infty; l_\infty\right)$, provando que $\mathcal{L}_{as(1;1,\infty)}$ não é um ideal simétrico.

2.2 Estudo da simetria de $[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]$

O próximo lema terá fundamental importância na demonstração do Teorema 2.2.2, que garantirá que $[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]$ é simétrico se, e somente se, $\mathcal{I}_1 = \cdots = \mathcal{I}_m$.

Lema 2.2.1 *Se $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ são ideais de operadores tais que $[\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2]$ é um ideal simétrico de aplicações bilineares, então $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{I}_1(E; F)$. Vamos provar que $u \in \mathcal{I}_2(E; F)$. É claro que podemos supor $E, F \neq \{0\}$. Fixe $\varphi \in E'$ e $a \in E$ tais que $\varphi(a) = 1$. Defina $A \in \mathcal{L}\left({}^2E; F\right)$, $T \in \mathcal{L}(F; \mathcal{L}(E; F))$ por

$$A(x, y) := \varphi(y) u(x) \text{ e } T(z)(y) := \varphi(y) z.$$

Segue que

$$(T \circ u)(x)(y) = T(u(x))(y) = \varphi(y) u(x) = A(x, y) = I_1(A)(x)(y).$$

Portanto $I_1(A) \in \mathcal{I}_1(E; \mathcal{L}(E; F))$. Por outro lado, como

$$I_2(A)(y) = A(\cdot, y) = \varphi(y) u,$$

então $I_2(A)$ é de tipo finito. Logo $I_2(A) \in \mathcal{I}_2(E; \mathcal{L}(E; F))$ e portanto $A \in [\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2]\left({}^2E; F\right)$. Como $[\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2]$ é simétrico, segue que $A_s \in [\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2]\left({}^2E; F\right)$.

Afirmamos que

$$2I(A_s) = I_1(A) + I_2(A).$$

De fato,

$$\begin{aligned} A(x, y) &= I_1(A)(x)(y) \\ A(x, y) &= I_2(A)(y)(x). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} 2I(A_s)(x)(y) &= 2A_s(x, y) \\ &= 2\left(\frac{A(x, y) + A(y, x)}{2}\right) \\ &= A(x, y) + A(y, x) \\ &= I_1(A)(x)(y) + I_2(A)(x)(y). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Como $I(A_s) \in \mathcal{I}_2(E; \mathcal{L}(E; F))$ e $I_2(A) \in \mathcal{I}_2(E; \mathcal{L}(E; F))$, segue, de (2.2), que

$$I_1(A) \in \mathcal{I}_2(E; \mathcal{L}(E; F)).$$

Defina o operador linear

$$\begin{aligned} U &: \mathcal{L}(E; F) \longrightarrow F \\ U(v) &:= v(a). \end{aligned}$$

Para qualquer $x \in E$, temos

$$(U \circ I_1(A))(x) = U(I_1(A)(x)) = I_1(A)(x)(a) = A(x, a) = \varphi(a) u(x) = u(x).$$

Assim

$$U \circ I_1(A) = u.$$

Da propriedade de ideal, segue que $u \in \mathcal{I}_2(E; F)$ e portanto $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$. A outra inclusão é análoga. ■

Teorema 2.2.2 *Sejam $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m$ ideais de operadores. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]$ é um ideal simétrico de aplicações multilineares;

(b) $[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m] = \left[\mathcal{I}_{\sigma(1)}, ..., \mathcal{I}_{\sigma(m)}\right]$ para toda permutação σ do conjunto $\{1, ..., m\}$;

(c) $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = \cdots = \mathcal{I}_m$.

Demonstração. $(c) \Rightarrow (b)$ Óbvio.

$(b) \Rightarrow (a)$ Seja $A \in [\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m] ({}^m E; F)$. Então, usando (b), segue que $A \in \left[\mathcal{I}_{\sigma(1)}, ..., \mathcal{I}_{\sigma(m)}\right] ({}^m E; F)$ para toda $\sigma \in S_m$. Portanto $I_j(A) \in \mathcal{I}_k\left(E; \mathcal{L}\left({}^{m-1}E; F\right)\right)$ para todo $j, k = 1, ..., m$. Fixe uma permutação σ e considere o operador $R_\sigma : \mathcal{L}\left({}^{m-1}E; F\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left({}^{m-1}E; F\right)$ definido por

$$R_\sigma(B)(x_2, ..., x_m) := B\left(x_{\sigma(1)}, \overset{[\sigma^{-1}(1)]}{\ldots}, x_{\sigma(m)}\right).$$

Para quaisquer $x_1, ..., x_m \in E$, temos

$$\begin{aligned}
m! I(A_s)(x_1)(x_2, ..., x_m) &= \sum_{\sigma \in S_m} A\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_m} I_{\sigma^{-1}(1)}(A)(x_1)\left(x_{\sigma(1)}, \overset{[\sigma^{-1}(1)]}{\ldots}, x_{\sigma(m)}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_m} R_\sigma\left(I_{\sigma^{-1}(1)}(A)(x_1)\right)\left(x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(m)}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_m} \left[R_\sigma \circ I_{\sigma^{-1}(1)}(A)(x_1)\right](x_2, ..., x_m).
\end{aligned}$$

Logo

$$m! I(A_s) = \sum_{\sigma \in S_m} R_\sigma \circ I_{\sigma^{-1}(1)}(A).$$

Como $I_{\sigma^{-1}(1)}(A) \in \mathcal{I}_k$ para toda $\sigma \in S_m$ e todo $k = 1, ..., m$, temos $I(A_s) \in \mathcal{I}_k\left(E; \mathcal{L}\left({}^{m-1}E; F\right)\right)$ para todo k. Segue que $A_s \in [\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]({}^m E; F)$ e portanto $[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]$ é um ideal simétrico de aplicações multilineares.

$(a) \Rightarrow (c)$ Pelo Lema 2.2.1, podemos assumir $m \geq 3$. Fixe $j \in \{2, 3, ..., m\}$ e seja $T \in [\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_j]\left({}^2 E; F\right)$ (novamente podemos supor $E, F \neq \{0\}$). Fixe $\varphi \in E'$, $a \in E$ tais que $\varphi(a) = 1$ e defina $A \in \mathcal{L}({}^m E; F)$ e $\psi_1 : \mathcal{L}(E; F) \longrightarrow \mathcal{L}\left({}^{m-1}E; F\right)$ por

$$\begin{aligned}
A(x_1, ..., x_m) &:= \varphi(x_2) \cdots \widehat{\varphi(x_j)} \cdots \varphi(x_m) T(x_1, x_j), \\
\psi_1(S)(x_2, ..., x_m) &:= \varphi(x_2) \cdots \widehat{\varphi(x_j)} \cdots \varphi(x_m) S(x_j),
\end{aligned}$$

onde $\widehat{\varphi(x_j)}$ significa que $\varphi(x_j)$ não está envolvido no produto. Temos que

$$\begin{aligned}
(\psi_1 \circ I_1(T))(x_1)(x_2, ..., x_m) &= \psi_1(I_1(T)(x_1))(x_2, ..., x_m) \\
&= \varphi(x_2) \cdots \widehat{\varphi(x_j)} \cdots \varphi(x_m) I_1(T)(x_1)(x_j) \\
&= \varphi(x_2) \cdots \widehat{\varphi(x_j)} \cdots \varphi(x_m) T(x_1, x_j) \\
&= A(x_1, ..., x_m) = I_1(A).
\end{aligned}$$

Logo

$$I_1(A) \in \mathcal{I}_1\left(E; \mathcal{L}\left({}^{m-1}E; F\right)\right). \tag{2.3}$$

Defina $U : \mathcal{L}\left({}^{m-1}E; F\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left({}^{m-1}E; F\right)$ por

$$U(B)(x_2, ..., x_m) := B(x_3, ..., x_{j-1}, x_j, x_2, x_{j+1}, ..., x_m).$$

Para quaisquer $x_1, ..., x_m \in E$, temos

$$\begin{aligned}
U \circ \psi_1 \circ I_2(T)(x_j)\left(x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m\right) &= U\left(\psi_1 \circ I_2(T)(x_j)\right)\left(x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m\right) \\
&= \psi_1\left(I_2(T)(x_j)\right)(x_2, ..., x_{j-1}, x_1, x_{j+1}, ..., x_m) \\
&= \varphi(x_2) \cdots \widehat{\varphi(x_j)} \cdots \varphi(x_m)\, I_2(T)(x_j)(x_1) \\
&= \varphi(x_2) \cdots \widehat{\varphi(x_j)} \cdots \varphi(x_m)\, T(x_1, x_j) \\
&= A(x_1, ..., x_m) = I_j(A)(x_j)\left(x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m\right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$I_j(A) = U \circ \psi_1 \circ I_2(T).$$

Como $I_2(T) \in \mathcal{I}_j(E; \mathcal{L}(E; F))$, segue que

$$I_j(A) \in \mathcal{I}_j\left(E; \mathcal{L}\left({}^{m-1}E; F\right)\right).$$

Note que $I_k(A)$, com $k = 2, 3, ..., m$ e $k \neq j$, é um operador de tipo finito. De fato,

$$I_k(A)(x_k)\left(x_1, \overset{[k]}{\ldots}, x_m\right) = A(x_1, ..., x_m) = \varphi(x_k) \prod_{\substack{l=2 \\ l \neq k, j}}^{m} \varphi(x_l)\, T(x_1, x_j).$$

Logo

$$I_k(A)(x_k) = \varphi(x_k)\, Z,$$

com $\varphi \in E'$ e

$$Z(x_1, \overset{[k]}{\ldots}, x_m) = \prod_{\substack{l=2 \\ l \neq k, j}}^{m} \varphi(x_l)\, T(x_1, x_j).$$

Logo, $Z \in \mathcal{L}\left({}^{m-1}E; F\right)$ e conseqüentemente $I_k(A)$ é de tipo finito. Assim, de (2.3) e do que acabamos de provar, segue que

$$I_k(A) \in \mathcal{I}_k\left(E; \mathcal{L}\left({}^{m-1}E; F\right)\right)$$

para todo $k = 1, ..., m$ e portanto

$$A \in [\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]\left({}^m E; F\right).$$

Usando nossa hipótese, segue que $A_s \in [\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]\left({}^m E; F\right)$. Ora,

$$\begin{aligned}
A_s(x_1, ..., x_m) &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}\right) \qquad (2.4) \\
&= \frac{1}{2(m!)} \sum_{\sigma \in S_m} \left(A\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}\right) + A\left(x_{\sigma(j)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2(m!)} \sum_{\sigma \in S_m} \varphi\left(x_{\sigma(2)}\right) \cdots \widehat{\varphi\left(x_{\sigma(j)}\right)} \cdots \varphi\left(x_{\sigma(m)}\right) \left(T\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(j)}\right) + T\left(x_{\sigma(j)}, x_{\sigma(1)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \varphi\left(x_{\sigma(2)}\right) \cdots \widehat{\varphi\left(x_{\sigma(j)}\right)} \cdots \varphi\left(x_{\sigma(m)}\right) T_s\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(j)}\right).
\end{aligned}$$

Definindo

$$\Delta_m := \{\sigma \in S_m; \sigma(1) = 1 \text{ ou } \sigma(j) = 1\},$$

de (2.4) temos

$$m!I\left(A_s\right)\left(x_1\right)\left(x_2,...,x_m\right)=\sum_{\sigma\in\Delta_m}\varphi\left(x_{\sigma(2)}\right)\cdots\widehat{\varphi\left(x_{\sigma(j)}\right)}\cdots\varphi\left(x_{\sigma(m)}\right)I\left(T_s\right)\left(x_{\sigma(1)}\right)\left(x_{\sigma(j)}\right)\tag{2.5}$$
$$+\sum_{\sigma\notin\Delta_m}\varphi\left(x_{\sigma(2)}\right)\cdots\widehat{\varphi\left(x_{\sigma(j)}\right)}\cdots\varphi\left(x_{\sigma(m)}\right)I\left(T_s\right)\left(x_{\sigma(1)}\right)\left(x_{\sigma(j)}\right).$$

O operador linear $V\in\mathcal{L}\left(E;\mathcal{L}\left({}^{m-1}E;F\right)\right)$ definido por

$$V\left(x_1\right)\left(x_2,...,x_m\right):=\sum_{\sigma\notin\Delta_m}\varphi\left(x_{\sigma(2)}\right)\cdots\widehat{\varphi\left(x_{\sigma(j)}\right)}\cdots\varphi\left(x_{\sigma(m)}\right)I\left(T_s\right)\left(x_{\sigma(1)}\right)\left(x_{\sigma(j)}\right)$$

é de tipo finito. Com efeito,

$$V\left(x_1\right)=\varphi\left(x_1\right)h,$$

com $h\in\mathcal{L}\left({}^{m-1}E;F\right)$ dada por

$$h\left(x_2,...,x_m\right)=\sum_{\sigma\notin\Delta_m}\left(\prod_{l\neq 1,j,\sigma^{-1}(1)}\varphi\left(x_{\sigma(l)}\right)T(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(j)})\right).$$

Como $m!I\left(A_s\right)\in\mathcal{I}_k\left(E;\mathcal{L}\left({}^{m-1}E;F\right)\right)$ para todo $k=1,...,m$, de (2.5) segue que o operador $R:E\longrightarrow\mathcal{L}\left({}^{m-1}E;F\right)$ dado por

$$R\left(x_1\right)\left(x_2,...,x_m\right):=\sum_{\sigma\in\Delta_m}\varphi\left(x_{\sigma(2)}\right)\cdots\widehat{\varphi\left(x_{\sigma(j)}\right)}\cdots\varphi\left(x_{\sigma(m)}\right)I\left(T_s\right)\left(x_{\sigma(1)}\right)\left(x_{\sigma(j)}\right)$$

pertence a $\mathcal{I}_k\left(E;\mathcal{L}\left({}^{m-1}E;F\right)\right)$ para todo $k=1,...,m$. Defina $f:\mathcal{L}\left({}^{m-1}E;F\right)\longrightarrow\mathcal{L}\left(E;F\right)$ por

$$f\left(B\right)\left(y\right):=B\left(y,a,...,a\right).$$

Daí

$$\left[\left(f\circ R\right)\left(x\right)\right]\left(y\right)=f\left(R\left(x\right)\right)\left(y\right)=R\left(x\right)\left(y,a,...,a\right).$$

Então, existem constantes k_1 e k_2, não nulas, tais que para quaisquer $x,y\in E$,

$$\left[\left(f\circ R\right)\left(x\right)\right]\left(y\right)=k_1 I\left(T_s\right)\left(x\right)\left(y\right)+k_2\varphi\left(y\right)I\left(T_s\right)\left(x\right)\left(a\right).\tag{2.6}$$

Seja $g:\mathcal{L}\left({}^{m-1}E;F\right)\longrightarrow F$ definida por

$$g\left(B\right):=B\left(a,...,a\right).$$

Como

$$\left(g\circ I\left(A_s\right)\right)\left(x\right)=g\left(I\left(A_s\right)\left(x\right)\right)=I\left(A_s\right)\left(x\right)\left(a,...,a\right)=A_s\left(x,a,...,a\right),$$

e

$$
\begin{aligned}
A_s(x_1,...,x_m) &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A\left(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}\right)\\
&= \frac{1}{m!}\left(\sum_{\substack{\sigma\in S_m\\ \sigma(1)=1}} \varphi\left(x_{\sigma(2)}\right)\cdots\widehat{\varphi\left(x_{\sigma(j)}\right)}\cdots\varphi\left(x_{\sigma(m)}\right)T(x_1,x_{\sigma(j)})\right.\\
&+\sum_{\substack{\sigma\in S_m\\ \sigma(j)=1}} \varphi\left(x_{\sigma(2)}\right)\cdots\widehat{\varphi\left(x_{\sigma(j)}\right)}\cdots\varphi\left(x_{\sigma(m)}\right)T(x_{\sigma(1)},x_1)\\
&\left.+\sum_{\substack{\sigma\in S_m\\ \sigma(j)\neq1\\ \sigma(1)\neq1}} \varphi\left(x_{\sigma(2)}\right)\cdots\widehat{\varphi\left(x_{\sigma(j)}\right)}\cdots\varphi\left(x_{\sigma(m)}\right)T(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(j)})\right),
\end{aligned}
$$

segue que, para todo $x\in E$, temos

$$
\begin{aligned}
(g\circ I(A_s))(x) &= A_s(x,a,...,a)\\
&= \frac{1}{m!}(m-1)!T(x,a)+\frac{1}{m!}(m-1)!T(a,x)+\frac{1}{m!}\left[m!-2(m-1)!\right]\varphi(x)T(a,a)\\
&= \frac{1}{m}T(x,a)+\frac{1}{m}T(a,x)+\frac{m-2}{m}\varphi(x)T(a,a).
\end{aligned}
$$

Como $g\circ I(A_s)\in\mathcal{I}_k(E;F)$ para todo k, e $\varphi(\cdot)T(a,a)$ é um operador de tipo finito, então $(T(\cdot,a)+T(a,\cdot))\in\mathcal{I}_k(E;F)$ para todo k. Finalmente, seja $\psi_2:F\longrightarrow\mathcal{L}(E;F)$ dada por

$$\psi_2(z)(x):=\varphi(x)z.$$

Veja que

$$
\begin{aligned}
\psi_2(T(x,a)+T(a,x))(y) &= \varphi(y)(T(x,a)+T(a,x))\\
&= 2\varphi(y)T_s(x,a)\\
&= 2\varphi(y)I(T_s)(x)(a).
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

De (2.6) e (2.7) temos

$$[(f\circ R)(x)](y)=k_1I(T_s)(x)(y)+\frac{k_2}{2}\psi_2(T(x,a)+T(a,x))(y),$$

para quaisquer $x,y\in E$. Logo

$$f\circ R=k_1I(T_s)+\frac{k_2}{2}\psi_2\circ(T(\cdot,a)+T(a,\cdot)).$$

Como $R\in\mathcal{I}_k\left(E;\mathcal{L}\left({}^{m-1}E;F\right)\right)$ e como $(T(\cdot,a)+T(a,\cdot))\in\mathcal{I}_k(E;F)$, pela Propriedade de Ideal segue que $I(T_s)\in\mathcal{I}_k(E;\mathcal{L}(E;F))$ para todo k. Logo $T_s\in[\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_j]\left({}^2E;F\right)$ e portanto $[\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_j]$ é simétrico. Segue do Lema 2.2.1 que $\mathcal{I}_1=\mathcal{I}_j$ para $j=2,3,...,m$. ■

2.3 Estudo da simetria de $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)$

Nesta seção usaremos um pouco da teoria de produtos tensoriais em espaços de Banach. Precisamente, usaremos o seguinte resultado: Se $A\in\mathcal{L}(G_1,...,G_m;F)$, então existe um espaço de Banach, denotado por $G_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi G_m$ (cujos elementos são chamados de tensores, dentre os quais estão elementos denotados por $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$, chamados de tensores elementares), e uma aplicação linear $A_L : G_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi G_m \to F$ tais que

$$A_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = A(x_1, ..., x_m).$$

Por motivos óbvios, A_L é chamada de linearização de A. Para mais detalhes sobre a teoria de produtos tensoriais em espaços de Banach, sugerimos [11, 29].

Teorema 2.3.1 *Sejam $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m$ ideais de operadores. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)$ é um ideal simétrico de aplicações multilineares;
(b) $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m) = \mathcal{L}\left(\mathcal{I}_{\sigma(1)}, ..., \mathcal{I}_{\sigma(m)}\right)$ para toda permutação $\sigma \in S_m$;
(c) $\mathcal{I}_1 = \cdots = \mathcal{I}_m$.

Demonstração. $(c) \Rightarrow (b)$. É claro.

$(b) \Rightarrow (a)$. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)(^mE; F)$. Então, existem espaços de Banach $G_1, ..., G_m$, operadores lineares $u_j \in \mathcal{I}_j(E; G_j), j = 1, ..., m$, e uma aplicação multilinear contínua $B \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; F)$ tais que $A = B \circ (u_1, ..., u_m)$. Dada $\sigma \in S_m$, defina

$$A_\sigma : E \times \cdots \times E \longrightarrow F \text{ e } B_\sigma : G_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times G_{\sigma^{-1}(m)} \longrightarrow F$$

por

$$\begin{aligned} A_\sigma(x_1, ..., x_m) &:= A\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}\right), \\ B_\sigma(y_1, ..., y_m) &:= B\left(y_{\sigma(1)}, ..., y_{\sigma(m)}\right). \end{aligned}$$

Note que B_σ está bem definida, pois

$$y_j \in G_{\sigma^{-1}(j)} \text{ para todo } j = 1, ..., m \Leftrightarrow y_{\sigma(j)} \in G_j \text{ para todo } j = 1, ..., m.$$

Como $u_j : E \longrightarrow G_j$, temos $u_{\sigma^{-1}(j)} : E \longrightarrow G_{\sigma^{-1}(j)}$. É fácil ver que

$$A_\sigma = B_\sigma\left(u_{\sigma^{-1}(1)}, ..., u_{\sigma^{-1}(m)}\right).$$

De fato,

$$\begin{aligned} B_\sigma\left(u_{\sigma^{-1}(1)}, ..., u_{\sigma^{-1}(m)}\right)(x_1, ..., x_m) &= B_\sigma\left(u_{\sigma^{-1}(1)}(x_1), ..., u_{\sigma^{-1}(m)}(x_m)\right) \\ &= B\left(u_1\left(x_{\sigma(1)}\right), ..., u_m\left(x_{\sigma(m)}\right)\right) \\ &= A\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}\right) = A_\sigma(x_1, ..., x_m). \end{aligned}$$

Logo

$$A_\sigma \in \mathcal{L}\left(\mathcal{I}_{\sigma^{-1}(1)}, ..., \mathcal{I}_{\sigma^{-1}(m)}\right)(^mE; F) = \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)(^mE; F)$$

para toda permutação $\sigma \in S_m$. Como

$$m!A_s = \sum_{\sigma \in S_m} A_\sigma,$$

segue que $A_s \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)(^mE; F)$ e portanto $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)$ é um ideal simétrico de aplicações multilineares.

$(a) \Rightarrow (c)$. No que segue, será claro que podemos supor $E \neq \{0\}$. Sejam $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$ e $u \in \mathcal{I}_i(E; F)$. Fixe $\varphi \in E', a \in E$ tais que $\varphi(a) = 1$ e defina $A \in \mathcal{L}(^mE; F), B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, ..., \mathbb{K}, F, \mathbb{K}, ..., \mathbb{K}; F)$ por

$$\begin{cases} A(x_1, ..., x_m) := \varphi(x_1) \cdots \widehat{\varphi(x_i)} \cdots \varphi(x_m) u(x_i), \\ B(\lambda_1, ..., \lambda_{i-1}, z, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_m) := \lambda_1 \cdots \widehat{\lambda_i} \cdots \lambda_m z. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} B\circ(\varphi,...,u,...,\varphi)(x_1,...,x_m) &= B(\varphi(x_1),...,u(x_i),...,\varphi(x_m)) \\ &= \varphi(x_1)\cdots\widehat{\varphi(x_i)}\cdots\varphi(x_m)\,u(x_i) = A(x_1,...,x_m), \end{aligned}$$

temos que

$$A = B\circ(\varphi,...,\varphi,u,\varphi,...,\varphi),$$

e daí $A\in\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)(^mE;F)$. Sendo $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)$ um ideal simétrico, segue que

$$A_s\in\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m)(^mE;F).$$

Então existem espaços de Banach $G_1,...,G_m$, operadores lineares $v_j\in\mathcal{I}_j(E;G_j)$ e uma aplicação multilinear contínua $C\in\mathcal{L}(G_1,...,G_m;F)$ tais que

$$A_s = C\circ(v_1,...,v_m).$$

Seja

$$C_L : G_1\hat{\otimes}_\pi\cdots\hat{\otimes}_\pi G_m \longrightarrow F : C_L(x_1\otimes\cdots\otimes x_m) = C(x_1,...,x_m).$$

Considere também o operador linear $i_j : G_j \longrightarrow G_1\hat{\otimes}_\pi\cdots\hat{\otimes}_\pi G_m$ definido por

$$i_j(z) := v_1(a)\otimes\cdots\otimes v_{j-1}(a)\otimes z\otimes v_{j+1}(a)\otimes\cdots\otimes v_m(a).$$

Assim

$$\begin{aligned} C_L\circ i_j\circ v_j(x) &= C_L(i_j(v_j(x))) \\ &= C_L(v_1(a)\otimes\cdots\otimes v_{j-1}(a)\otimes v_j(x)\otimes v_{j+1}(a)\otimes\cdots\otimes v_m(a)) \\ &= C(v_1(a),...,v_{j-1}(a),v_j(x),v_{j+1}(a),...,v_m(a)) \\ &= A_s(a,...,a,x,a,...,a) \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A_\sigma(a,...,a,x,a,...,a) \\ &= K_1u(x) + K_2\varphi(x)\,u(a), \end{aligned}$$

onde K_1, K_2 são constantes positivas. Como $v_j\in\mathcal{I}_j(E;G_j)$ e $\varphi(\cdot)\,u(a)$ é um operador de tipo finito, segue que $u\in\mathcal{I}_j(E;F)$. Portanto $\mathcal{I}_i\subset\mathcal{I}_j$ e, como i e j são arbitrários, temos a igualdade. ■

Capítulo 3

O ideal dos Operadores Absolutamente (p, q)-Somantes

A teoria de operadores absolutamente somantes surgiu na década de 50, a partir das idéias inovadoras de Grothendieck [15]. Desde então, principalmente a partir do final da década de 60, com o famoso artigo de Lindenstrauss e Pełczyński [18], a teoria de operadores absolutamente somantes tornou-se um tema central na Análise Funcional. Na década de 80, com o trabalho de Pietsch [27], operadores absolutamente somantes começaram a ser generalizados para o contexto não-linear e, nessa direção, o estudo de ideais de polinômios/ aplicações n-lineares absolutamente somantes tem um papel central.

3.1 Teoria Linear

Definição 3.1.1 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é fortemente p-somável se a seqüência de escalares correspondente $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ estiver em l_p.*

Denotamos por $l_p(E)$ o espaço vetorial de todas as seqüências fortemente p-somáveis em E. Uma norma natural em $l_p(E)$ é dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Não é difícil mostrar que $\left(l_p(E), \|\cdot\|_p\right)$ é completo. A demonstração é uma adaptação simples da demonstração de que l_p é completo.

Definição 3.1.2 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é fracamente p-somável se a seqüência de escalares $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ estiver em $l_p(E)$ para todo $\varphi \in E'$.*

Denotamos por $l_p^w(E)$ o conjunto de todas as seqüências fracamente p-somáveis em E. Uma norma natural em $l_p^w(E)$ é dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.1}$$

Usando o Teorema do Gráfico Fechado é possível demonstrar que $l_p^w(E)$, com a norma dada em (3.1), é um espaço de Banach (veja [13] ou [31] para mais detalhes em português).

Se $u : E \to F$ é um operador linear limitado entre espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$, as correspondências

$$\begin{aligned} \widehat{u}^s &: l_p(E) \to l_p(F) : (x_n)_{n=1}^\infty \to (u(x_n))_{n=1}^\infty \\ \widehat{u}^w &: l_p^w(E) \to l_p^w(F) : (x_n)_{n=1}^\infty \to (u(x_n))_{n=1}^\infty \end{aligned}$$

sempre são operadores lineares limitados. Com efeito, se $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_p(E)$, então

$$\left\|\widehat{u}^s\left((x_n)_{n=1}^\infty\right)\right\|_p = \left\|(u(x_n))_{n=1}^\infty\right\|_p \leq \|u\| \left\|(x_n)_{n=1}^\infty\right\|_p. \tag{3.2}$$

De modo análogo pode-se mostrar que $\widehat{u}^w$ está bem definido. É claro que $\widehat{u}^s$ e $\widehat{u}^w$ são lineares e, por (3.2), $\widehat{u}^s$ é contínua. Como

$$\|u(x)\| = \left\|\widehat{u}^s(x, 0, 0, ...)\right\|_p \leq \|\widehat{u}^s\| \|x\|, \tag{3.3}$$

segue de (3.2) e de (3.3) que $\|\widehat{u}^s\| = \|u\|$ (também não é difícil mostrar que $\|\widehat{u}^w\| = \|u\|$). Se $1 \leq q \leq p < \infty$, então as correspondências

$$\begin{aligned} \widehat{u}^s &: l_q(E) \to l_p(F) : (x_n)_{n=1}^\infty \to (u(x_n))_{n=1}^\infty \\ \widehat{u}^w &: l_q^w(E) \to l_p^w(F) : (x_n)_{n=1}^\infty \to (u(x_n))_{n=1}^\infty \end{aligned}$$

também são operadores lineares limitados. De fato, para qualquer $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_q(E)$, temos

$$\left\|\widehat{u}^s\left((x_n)_{n=1}^\infty\right)\right\|_p = \left\|(u(x_n))_{n=1}^\infty\right\|_p \leq \|u\| \left\|(x_n)_{n=1}^\infty\right\|_p \leq \|u\| \left\|(x_n)_{n=1}^\infty\right\|_q.$$

O caso particularmente interessante é quando este processo induz um operador linear limitado de $l_q^w(E)$ em $l_p(F)$. Neste caso, temos a seguinte definição:

Definição 3.1.3 *Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $u : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que u é absolutamente (p,q)-somante (ou (p,q)-somante) se existir um operador induzido*

$$\begin{aligned} \hat{u} : l_q^w(E) &\to l_p(F) \\ (x_n)_{n=1}^\infty &\to (u(x_n))_{n=1}^\infty. \end{aligned}$$

Mais geralmente, dizemos que uma função $f : E \to F$, tal que $f(0) = 0$, é absolutamente (p,q)-somante se

$$(f(x_n))_{n=1}^\infty \in l_p(F)$$

sempre que $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_q^w(E)$.

Denotamos por $\prod_{p,q}(E;F)$ o conjunto formado pelos operadores lineares absolutamente (p,q)-somantes de E em F. É fácil ver que $\prod_{p,q}(E;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$.

Proposição 3.1.4 *Seja $u \in \mathcal{L}(E;F)$. São equivalentes:*

(i) u é (p,q)-somante;

(ii) Existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.4}$$

para quaisquer $x_1, ..., x_n$ em E e n natural;

(iii) Existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que u seja (p,q)-somante. Vamos mostrar que $\hat{u}$ tem gráfico fechado. De fato, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de termos em $l_q^w(E)$ (note que para cada n natural, temos $x_n = (x_n^{(j)})_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$), com $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergindo para $\left(x^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ em $l_q^w(E)$ e $\hat{u}(x_n)$ convergindo para $\left(y^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ em $l_p(F)$. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$converge para $\left(x^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}$, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 natural, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left\|x_n^{(j)} - x^{(j)}\right\| \leq \left\|\left(x_n^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty} - \left(x^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} < \varepsilon$$

para todo $j = 1, 2, ...$ Logo $x_n^{(j)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^{(j)}$ para todo $j = 1, 2, ...$ Note que

$$\left(y^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \hat{u}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(u\left(x_n^{(j)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}.$$

Segue que

$$\lim_{n\to\infty} u\left(x_n^{(j)}\right) = y^{(j)}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e, como u é contínua, temos que $y^{(j)} = u\left(x^{(j)}\right)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo

$$\left(y^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty} = \left(u\left(x^{(j)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} = \hat{u}\left(\left(x^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}\right).$$

Como $\hat{u}$ é linear, pelo Teorema do Gráfico Fechado, $\hat{u}$ é contínua. Portanto, para qualquer seqüência finita $x_1, ..., x_n$ em E,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(u(x_k))_{k=1}^{n}\|_p = \|\hat{u}((x_k)_{k=1}^{n})\|_p \tag{3.5}$$

$$\leq \|\hat{u}\| \|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{w,q} = \|\hat{u}\| \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$. Então, usando (ii), temos

$$\left\|(u(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_n \left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.6}$$

$$\leq \sup_n C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_n \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{q}} = C \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ De (iii) segue facilmente que $\hat{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) \in l_p(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$. ■

Proposição 3.1.5 *O ínfimo dos C que verificam a desigualdade (3.4) define uma norma em $\prod_{p,q}(E;F)$, denotada por $\pi_{p,q}(u)$. Temos ainda $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$ e, portanto, o ínfimo ainda satisfaz a desigualdade (3.4).*

Demonstração. É claro que

$$\pi_{p,q}(u) \geq 0 \text{ para todo } u \in \prod\nolimits_{p,q}(E;F),$$

e

$$\pi_{p,q}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|\lambda u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq |\lambda| \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Daí

$$\pi_{p,q}(\lambda u) \leq |\lambda| \pi_{p,q}(u). \tag{3.7}$$

Por outro lado, de

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|\lambda u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(\lambda u) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{|\lambda|} \pi_{p,q}(\lambda u) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Logo

$$\pi_{p,q}(u) \leq \frac{1}{|\lambda|} \pi_{p,q}(\lambda u), \tag{3.8}$$

e, de (3.7) e (3.8), segue que

$$|\lambda| \pi_{p,q}(u) = \pi_{p,q}(\lambda u).$$

Agora, sejam u e v em $\prod_{p,q}(E;F)$. Pela Proposição 3.1.4, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.9}$$

e

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|v(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(v) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.10}$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$. Usando a Desigualdade de Minkowski, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|(u+v)(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|v(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e segue de (3.9) e (3.10) que

$$\pi_{p,q}(u+v) \leq \pi_{p,q}(u) + \pi_{p,q}(v).$$

Portanto $\pi_{p,q}(\cdot)$ é uma norma em $\prod_{p,q}(E;F)$.

Note ainda que

$$\|\hat{u}\| = \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\le 1} \left\|\hat{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_p = \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\le 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.11}$$
$$\le \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\le 1} \pi_{p,q}(u)\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} = \pi_{p,q}(u).$$

Segue de (3.5) e de (3.11) que $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$. ∎

Denotamos por $\prod_{p,q}$ a subclasse da classe de todos os operadores lineares entre espaços de Banach que são absolutamente (p,q)-somantes.

Teorema 3.1.6 *Se $1 \le q \le p < \infty$, então $\left(\prod_{p,q}, \pi_{p,q}\right)$ é um ideal normado de operadores lineares.*

Demonstração. Sejam E e F espaços de Banach. Já vimos que $\prod_{p,q}(E;F)$ é um espaço vetorial normado. Vamos mostrar que $\prod_{p,q}(E;F)$ contém os operadores de posto finito. Para isso, vamos mostrar que

$$u : E \longrightarrow F : u(x) = \varphi(x)\, y$$

com $\varphi \in E'$ e $y \in F$, pertence a $\prod_{p,q}(E;F)$. De fato, sejam $x_1, ..., x_m$ em E. Caso $\varphi = 0$, é claro que $u \in \prod_{p,q}(E;F)$. Suponha $\varphi \neq 0$. Então

$$\left(\sum_{n=1}^{m}\|u(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{m}\|y\varphi(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.12}$$
$$= \|y\|\,\|\varphi\|\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{|\varphi(x_n)|^p}{\|\varphi\|^p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \|y\|\,\|\varphi\| \sup_{\psi\in B_{E'}}\left(\sum_{n=1}^{m}|\psi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \|y\|\,\|\varphi\| \sup_{\psi\in B_{E'}}\left(\sum_{n=1}^{m}|\psi(x_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Portanto u é (p,q)-somante. Temos ainda da Observação 3.1.7 que

$$\|y\|\,\|\varphi\| = \|u\| \le \pi_{p,q}(u)$$

e, de (3.12), $\pi_{p,q}(u) \le \|y\|\,\|\varphi\|$. Portanto,

$$\|y\|\,\|\varphi\| = \pi_{p,q}(u).$$

Para $u \in \mathcal{L}_f(E;F)$, temos

$$u = \sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\cdot)\, y_j \text{ com } \varphi_j \in E' \text{ e } y \in F.$$

Como $\varphi_j(\cdot)\, y_j \in \prod_{p,q}(E;F)$ para cada $j = 1, ..., m$, segue que $u \in \prod_{p,q}(E;F)$.

Agora, sejam $w \in \mathcal{L}(E_0;E)$, $v \in \prod_{p,q}(E,F)$ e $u \in \mathcal{L}(F;F_0)$. Considere os operadores

$$\hat{w}^w : l_q^w(E_0) \longrightarrow l_q^w(E)$$
$$\hat{v} : l_q^w(E) \longrightarrow l_p(F)$$
$$\hat{u}^s : l_p(F) \longrightarrow l_p(F_0).$$

Note que
$$\|\hat{w}^w\| = \|w\|, \|\hat{v}\| = \pi_{p,q}(v) \text{ e } \|\hat{u}^s\| = \|u\|.$$
Perceba ainda que, se $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_q^w(E_0)$, temos
$$\begin{aligned} \hat{u}^s\hat{v}\hat{w}^w\left((x_n)_{n=1}^\infty\right) &= \hat{u}^s\hat{v}\left((w(x_n))_{n=1}^\infty\right) \\ &= \hat{u}^s\left(vw(x_n)\right)_{n=1}^\infty \\ &= (uvw(x_n))_{n=1}^\infty = \widehat{uvw}\left((x_n)_{n=1}^\infty\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$
Portanto $\widehat{uvw} = \hat{u}^s\hat{v}\hat{w}^w : l_q^w(E_0) \longrightarrow l_p(F_0)$ está bem definido e, assim, $uvw \in \prod_{p,q}(E_0, F_0)$, com
$$\pi_{p,q}(uvw) = \|\widehat{uvw}\| \leq \|\hat{u}^s\| \|\hat{v}\| \|\hat{w}^w\| = \|u\| \pi_{p,q}(v) \|w\|.$$
Finalmente, provemos que $\pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) = 1$. Para qualquer x em $\mathbb{K}$, temos
$$\begin{aligned} \|x\| = \|(x,0,0,...)\|_p &= \|(id_{\mathbb{K}}x,0,0,...)\|_p \\ &\leq \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \|(x,0,0,...)\|_{w,q} = \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \|x\|, \ \forall x \in \mathbb{K}, \end{aligned} \tag{3.14}$$
e, para qualquer $(x_n)_{n=1}^\infty$ em $l_q^w(\mathbb{K})$, obtemos
$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^\infty |id_{\mathbb{K}}(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^\infty |id_{\mathbb{K}}(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{\varphi \in B_{\mathbb{K}'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \ \ \forall (x_j)_{j=1}^\infty \in l_p^w(\mathbb{K}). \end{aligned} \tag{3.15}$$
Logo $1 \overset{(3.14)}{\leq} \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \overset{(3.15)}{\leq} 1.$ ■

Observação 3.1.7 *Se $u \in \prod_{p,q}(E;F)$, pela Proposição 1.1.7 e pelo Teorema 3.1.6 segue que $\|u\| \leq \pi_{p,q}(u)$.*

Proposição 3.1.8 *Se $1 \leq q \leq p < \infty$, então $\left(\prod_{p,q}, \pi_{p,q}\right)$ é um ideal de Banach. Mais ainda, é um ideal injetivo.*

Demonstração. Seja $(u_n)_{n=1}^\infty$ uma seqüência de Cauchy em $\left(\prod_{p,q}(E;F), \pi_{p,q}\right)$. Como $\|\cdot\| \leq \pi_{p,q}(\cdot)$, temos que $(u_n)_{n=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{L}(E;F)$. Seja $u \in \mathcal{L}(E;F)$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

Como cada u_n é (p,q)-somante, segue que, para todo n natural, o operador $\hat{u}_n : l_q^w(E) \to l_p(F)$ está bem definido. Como $\|\hat{u}_n\| = \pi_{p,q}(u_n)$, temos que $(\hat{u}_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathcal{L}\left(l_q^w(E); l_p(F)\right)$. Logo, $(\hat{u}_n)_{n=1}^\infty$ converge para algum $w \in \mathcal{L}\left(l_q^w(E); l_p(F)\right)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 natural, tal que
$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{w,q} \leq 1} \left\|\hat{u}_n\left((x_j)_{j=1}^\infty\right) - w\left((x_j)_{j=1}^\infty\right)\right\|_p < \varepsilon. \tag{3.16}$$

Logo
$$n \geq n_0 \Rightarrow \left\|\hat{u}_n\left((x_j)_{j=1}^\infty\right) - w\left((x_j)_{j=1}^\infty\right)\right\|_p < \varepsilon \left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{w,q} \tag{3.17}$$

para cada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$.

Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$ e defina

$$(y_j)_{j=1}^{\infty} := w\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) \in l_p(F). \tag{3.18}$$

De (3.17) temos

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|u_n(x_j) - y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(u_n(x_j))_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p < \varepsilon \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}. \tag{3.19}$$

De (3.19) temos

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n(x_j) - y_j\| < \varepsilon \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}, \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

Assim, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_j) = y_j.$$

Como u_n converge para u, temos

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_j) = u(x_j) \tag{3.21}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, e segue que

$$u(x_j) = y_j \tag{3.22}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Note que, de (3.18) e (3.22), obtemos

$$(u(x_j))_{j=1}^{\infty} = (y_j)_{j=1}^{\infty} = w\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) \in l_p(F) \ \ \forall \ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E).$$

Logo

$$\hat{u} : l_q^w(E) \to l_p(F) : \hat{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (u(x_j))_{j=1}^{\infty}$$

está bem definido e portanto u é (p,q)-somante. De (3.19) e (3.22) segue que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|u_n(x_j) - u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}$$

e, como $u \in \prod_{p,q}(E;F)$, temos $u_n \to u$ em $\left(\prod_{p,q}(E;F), \pi_{p,q}\right)$. Logo $\left(\prod_{p,q}, \pi_{p,q}\right)$ é um ideal de Banach.

Agora vamos mostrar que $\left(\prod_{p,q}, \pi_{p,q}\right)$ é injetivo. Sejam $u \in \prod_{p,q}(E;F)$ e $v \in \mathcal{L}(F;G)$ um isomorfismo isométrico sobre a imagem. Então

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|v(u(x_j))\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(v \circ u) \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q} \\ \left(\sum_{j=1}^{n} \|v(u(x_j))\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(u) \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q} \end{cases}$$

e daí segue que $\pi_{p,q}(u) \leq \pi_{p,q}(v \circ u) \leq \pi_{p,q}(u)$. ■

Teorema 3.1.9 (Teorema da Inclusão) *Suponha que* $1 \leq q_j \leq p_j < \infty$ $(j = 1, 2)$ *satisfazem* $q_1 \leq q_2, p_1 \leq p_2$ *e* $\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2}$. *Então*

$$\prod\nolimits_{p_1,q_1}(E;F) \subset \prod\nolimits_{p_2,q_2}(E;F)$$

para quaisquer espaços de Banach E *e* F. *Mais ainda, para* $u \in \prod_{p_1,q_1}(E;F)$ *temos*

$$\pi_{p_2,q_2}(u) \leq \pi_{p_1,q_1}(u).$$

Demonstração. Podemos supor que $q_1 < q_2$, pois o caso $q_1 = q_2$ é simples. Nesse caso, devemos ter também $p_1 < p_2$, e assim podemos definir $1 < q, p < \infty$ por

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \text{ e } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}.$$

Sejam u em $\prod_{p_1,q_1}(E;F)$ e $x_1, ..., x_n$ em E. Então, para $\lambda_k = \|ux_k\|^{p_2/p}$ $(1 \leq k \leq n)$, temos

$$\|u(\lambda_k x_k)\|^{p_1} = \left\|u\left(\|ux_k\|^{p_2/p} x_k\right)\right\|^{p_1} = \left(\|ux_k\| \, \|ux_k\|^{p_2/p}\right)^{p_1} = \|ux_k\|^{p_2}.$$

Como u é (p_1, q_1)-somante, então

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(\lambda_k x_k)\|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \pi_{p_1,q_1}(u) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{q_1} |\varphi(x_k)|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Pela Desigualdade de Hölder para os conjugados $\frac{q}{q_1}$ e $\frac{q_2}{q_1}$, segue que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi_{p_1,q_1}(u) \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(u) \left\|(\lambda_k)_{k=1}^{n}\right\|_q \left\|(x_k)_{k=1}^{n}\right\|_{w,q_2}.\end{aligned}$$

Como $p \leq q$, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi_{p_1,q_1}(u) \left\|(\lambda_k)_{k=1}^{n}\right\|_p \left\|(x_k)_{k=1}^{n}\right\|_{w,q_2} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(u) \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left\|(x_k)_{k=1}^{n}\right\|_{w,q_2} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(u) \left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p}} \left\|(x_k)_{k=1}^{n}\right\|_{w,q_2}.\end{aligned}$$

Segue facilmente que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \pi_{p_1,q_1}(u) \left\|(x_k)_{k=1}^{n}\right\|_{w,q_2}.$$

Logo $u \in \prod_{p_2,q_2}(E;F)$ e $\pi_{p_2,q_2}(u) \leq \pi_{p_1,q_1}(u)$. ■

3.2 Teoria Multilinear e Polinomial relacionada a Operadores Absolutamente Somantes

Aplicações multilineares e polinômios que são absolutamente somantes em um dado ponto (e também em todo ponto) foram introduzidas por M. Matos [19], e desenvolvidas em [5, 10, 24, 25, 26].

Um teorema do tipo Dvoretzky-Rogers, que afirma que em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita existe uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável, é válido para polinômios absolutamente somantes em todo ponto (veja [19]), mas não vale para polinômios absolutamente somantes (na origem). Nesta seção mostraremos um teorema do tipo Dvoretzky-Rogers que vale para polinômios absolutamente somantes em dado ponto não nulo. Veremos também um teorema semelhante para aplicações multilineares absolutamente somantes. Definiremos ainda uma norma natural para os ideais de polinômios e aplicações multilineares absolutamente somantes em todo ponto. Os resultados desta seção, em sua maioria, aparecem em [1].

Definição 3.2.1 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $p, q_1, ..., q_m \geq 1$ e $E_1, ..., E_m$,F espaços de Banach. Uma aplicação multilinear contínua $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é absolutamente $(p; q_1, ..., q_m)$-somante, (ou $(p; q_1, ..., q_m)$-somante) no ponto $(a_1, ..., a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ quando,*

$$\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_m + x_j^{(m)}\right) - T\left(a_1, ..., a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p\left(F\right)$$

sempre que $\left(x_j^{(s)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_s}^{w}\left(E_s\right)$, $s = 1, ..., m$.

Observação 3.2.2 *No caso de uma aplicação $A : E_1 \times E_2 \to F$ bilinear, quando $p = q_1 = 1$ e $q_2 = \infty$, dizemos que A é absolutamente $(1; 1, \infty)$-somante (absolutamente $(1; 1, \infty)$-somante na origem) se $\left(A\left(x_j, y_j\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_1\left(F\right)$ sempre que $\left(x_j\right)_{j=1}^{\infty} \in l_1\left(E_1\right)$ e $\left(y_j\right)_{j=1}^{\infty}$ for limitada em E_2. Este foi o caso usado no Capítulo 2, para dar um exemplo de um ideal que não é simétrico.*

Não é difícil provar que a classe de todas as aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F, que são absolutamente $(p; q_1, ..., q_m)$-somantes em um dado ponto é um subespaço de $\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_m; F\right)$. De fato, sejam T e A aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F absolutamente $(p; q_1, ..., q_m)$-somantes no ponto $(a_1, ..., a_m)$ em $E_1 \times \cdots \times E_m$ e $k \in \mathbb{K}$. Então

$$\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_m + x_j^{(m)}\right) - T\left(a_1, ..., a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p\left(F\right)$$

e

$$\left(A\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_m + x_j^{(m)}\right) - A\left(a_1, ..., a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p\left(F\right),$$

para qualquer $\left(x_j^{(s)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_s}^{w}\left(E\right)$, $s = 1, ..., m$. Logo

$$\begin{aligned}
&\left(\left(T + kA\right)\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_m + x_j^{(m)}\right) - \left(T + kA\right)\left(a_1, ..., a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_m + x_j^{(m)}\right) + kA\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_m + x_j^{(m)}\right) - T\left(a_1, ..., a_m\right) - kA\left(a_1, ..., a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_m + x_j^{(m)}\right) - T\left(a_1, ..., a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty}
\end{aligned}$$

$$+k\left(A\left(a_1+x_j^{(1)},...,a_m+x_j^{(m)}\right)-A\left(a_1,...,a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty}\in l_p\left(F\right),$$

para qualquer $\left(x_j^{(s)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_{q_s}^w\left(E\right),\ s=1,...,m$. Portanto $T+kA$ é absolutamente $(p;q_1,...,q_m)$-somante em $(a_1,...,a_m)\in E_1\times\cdots\times E_m$.

O espaço vetorial formado pelas aplicações multilineares de $E_1\times\cdots\times E_m$ em F que são $(p;q_1,...,q_m)$-somantes em $a\in E_1\times\cdots\times E_m$ é denotado por $\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_m)}^{(a)}\left(E_1,...,E_m;F\right)$. Quando $q_1=\cdots=q_m=q$, nós escrevemos $\mathcal{L}_{as(p;q)}^{(a)}\left(E_1,...,E_m;F\right)$. Uma aplicação multilinear de $E_1\times\cdots\times E_m$ em F que é absolutamente $(p;q_1,...,q_m)$-somante na origem é chamada simplesmente de absolutamente $(p;q_1,...,q_m)$-somante e o espaço veotrial de todas aplicações multilineares absolutamente $(p;q_1,...,q_m)$-somantes de $E_1\times\cdots\times E_m$ em F é representado por $\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_m)}\left(E_1,...,E_m;F\right)$.

O espaço vetorial formado pelas aplicações multilineares de $E_1\times\cdots\times E_m$ em F que são absolutamente $(p;q_1,...,q_m)$-somantes em todo ponto é denotado por $\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_m)}^{ev}\left(E_1,...,E_m;F\right)$. Se $p=q=q_1=\cdots=q_m$, escrevemos $\mathcal{L}_{as,p}^{ev}$, $\mathcal{L}_{as,p}$ e $\mathcal{L}_{as,p}^{(a)}$, conforme o caso.

Proposição 3.2.3 *$T\in\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_m)}\left(E_1,...,E_m;F\right)$ se, e somente se, existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\prod_{s=1}^{m}\left\|\left(x_j^{(s)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_s}\tag{3.23}$$

sempre que $\left(x_j^{(s)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_{q_s}^w\left(E_s\right),\ s=1,...,m$. O ínfimo dos C tais que a desigualdade (3.23) é válida definine uma norma em $\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_m)}\left(E_1,...,E_m;F\right)$ e será denotada por $\pi_{(p;q_1,...,q_m)}\left(\cdot\right)$.

Demonstração. Defina $\hat{T}:l_{q_1}^w\left(E_1\right)\times\cdots\times l_{q_m}^w\left(E_m\right)\to l_p\left(F\right)$ por

$$\hat{T}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)=\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}.$$

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em $l_{q_1}^w\left(E_1\right)\times\cdots\times l_{q_m}^w\left(E_m\right)$ convergindo para

$$x=\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)$$

e tal que

$$\lim_{n\to\infty}\hat{T}(x_n)=(z_j)_{j=1}^{\infty}\in l_p(F).$$

Para cada n natural, escrevemos

$$x_n=\left(\left(x_{n,j}^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_{n,j}^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\in l_{q_1}^w\left(E_1\right)\times\cdots\times l_{q_m}^w\left(E_m\right).$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty}\left(T\left(x_{n,j}^{(1)},...,x_{n,j}^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}=(z_j)_{j=1}^{\infty}\tag{3.24}$$

e daí segue que

$$\lim_{n\to\infty}T\left(x_{n,j}^{(1)},...,x_{n,j}^{(m)}\right)=z_j\tag{3.25}$$

para todo $j\in\mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$n>n_0\Rightarrow\|x_n-x\|<\varepsilon.$$

Note que

$$\|x_n - x\| = \max_{1\leq k\leq m} \left\| \left(x_{n,j}^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} - \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q_k} \geq \left\| \left(x_{n,j}^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} - \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q_k}$$

para todo $k = 1, ..., m$. Daí

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_{n,j}^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} = \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ k = 1, ..., m.$$

Como para todo $k = 1, ..., m$ e todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \left(x_{n,j}^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} - \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q_k} \geq \left\| x_{n,j}^{(k)} - x_j^{(k)} \right\|,$$

segue que $\left(x_{n,j}^{(k)}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge para $x_j^{(k)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $k = 1, ..., m$. Assim

$$\lim_{n\to\infty} T\left(x_{n,j}^{(1)}, ..., x_{n,j}^{(m)}\right) = T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)}\right). \tag{3.26}$$

De (3.25) e (3.26) segue que

$$T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)}\right) = z_j \tag{3.27}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \hat{T}\left(\left(x_{n,j}^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_{n,j}^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(T\left(x_{n,j}^{(1)}, ..., x_{n,j}^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&\overset{(3.24)}{=} (z_j)_{j=1}^{\infty} \\
&\overset{(3.27)}{=} \left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \hat{T}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right).
\end{aligned}$$

Desse modo, pelo Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 1.2.8), segue que $\hat{T}$ é contínua.

Portanto, para $\left(x_j^{(s)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_s}^w(E_s)$, $s = 1, ..., m$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)}\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left\| \left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_p \\
&= \left\| \hat{T}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) \right\|_p \\
&\leq \left\|\hat{T}\right\| \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q_1} \cdots \left\| \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q_m}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

A recíproca é clara.

Com a mesma idéia usada no caso linear, verifica-se que $\pi_{(p;q_1,...,q_m)}(T) = \left\|\hat{T}\right\|$. É fácil ver que $\pi_{(p;q_1,...,q_m)}(T) \geq 0$ para qualquer T em $\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_m)}(E_1, ..., E_m; F)$, e que

$$\pi_{(p;q_1,...,q_m)}(T) = 0 \Leftrightarrow \left\|\hat{T}\right\| = 0 \Leftrightarrow T = 0.$$

Para qualquer $k \in \mathbb{K}$

$$\pi_{(p;q_1,...,q_m)}(kT) = \left\|k\hat{T}\right\| = |k| \left\|\hat{T}\right\| = |k| \, \pi_{(p;q_1,...,q_m)}(T),$$

e ainda, se $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_m)}(E_1,...,E_m;F)$, temos

$$\pi_{(p;q_1,...,q_m)}(T_1+T_2) = \left\|\hat{T}_1+\hat{T}_2\right\| \leq \left\|\hat{T}_1\right\| + \left\|\hat{T}_2\right\| = \pi_{(p;q_1,...,q_m)}(T_1) + \pi_{(p;q_1,...,q_m)}(T_2).$$

Logo $\pi_{(p;q_1,...,q_m)}(\cdot)$ define uma norma em $\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_m)}(E_1,...,E_m;F)$. ■

Definição 3.2.4 *Sejam $p, q \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ e E, F espaços de Banach. Um polinômio m-homogêneo contínuo $P : E \to F$ é absolutamente (p, q)-somante, (ou (p, q)-somante) em $a \in E$ se*

$$(P(a+x_j) - P(a))_{j=1}^{\infty} \in l_p(E)$$

para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$.

Como acontece no caso de aplicações multilineares, é fácil verificar que a classe de todos os polinômios m-homogêneos $P : E \to F$ absolutamente (p, q)-somantes em $a \in E$, representada por $\mathcal{P}_{as(p;q)}^{(a)}(^mE;F)$, é um subespaço de $\mathcal{P}(^mE;F)$. Os polinômios absolutamente (p, q)-somantes em $a = 0$ são chamados simplesmente de absolutamente (p, q)-somantes, e o espaço vetorial de todos os polinômios m-homogenêos absolutamente (p, q)-somantes de E em F é representado por $\mathcal{P}_{as(p;q)}(^mE;F)$.

O espaço formado pelos polinômios m-homogêneos $P : E \to F$, absolutamente (p, q)-somantes em todos os pontos, é denotado por $\mathcal{P}_{as(p;q)}^{ev}(^mE;F)$. Se $p = q$, escrevemos $\mathcal{P}_{as,p}^{ev}$, $\mathcal{P}_{as,p}$ e $\mathcal{P}_{as,p}^{(a)}$, conforme o caso.

3.2.1 Teoremas do tipo Dvoretzky-Rogers (TDR)

Enunciaremos abaixo o Teorema de Dvoretzy-Rogers (clássico). Sua demonstração pode ser encontrada em vários textos especializados. Sugerimos [13] e, para uma exposição em português, sugerimos [3, 31].

Teorema 3.2.5 (Teorema de Dvoretzky-Rogers) *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Então, para qualquer escolha de $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$ sempre existe uma seqüência incondicionalmente somável $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E com $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo n.*

No nosso contexto, quando mencionamos o Teorema de Dvoretzky-Rogers ficará subentendido que estamos nos referindo à versão fraca do Teorema de Dvoretzky-Rogers (veja [13, Theorem 2.18]):

Teorema 3.2.6 (Versão fraca do Teorema de Dvoretzky-Rogers) *Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então id_E é absolutamente p-somante se, e somente se,* $\dim E < \infty$.

O Teorema de Dvoretzky-Rogers para Aplicações Multilineares

Começamos mostrando algumas conexões entre $\mathcal{L}_{as(p;q)}^{(a)}(E_1,...,E_m;F)$ e $\mathcal{L}_{as(p;q)}^{(b)}(E_1,...,E_m;F)$ para $a \neq b$. Dados $T \in \mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ e $a = (a_1,...,a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, nós denotamos por T_{a_1} a aplicação $(m-1)$-linear de $E_2 \times \cdots \times E_m$ em F dada por

$$T_{a_1}(x_2,...,x_m) = T(a_1,x_2,...,x_m).$$

Analogamente, definimos as aplicações $(m-1)$-lineares $T_{a_2}, ..., T_{a_m}$, as aplicações $(m-2)$-lineares

$$T_{a_1,a_2} = T\left(a_1, a_2, \cdot, ..., \cdot\right), ..., T_{a_{m-1},a_m} = T\left(\cdot, ..., \cdot, a_{m-1}, a_m\right)$$

e as aplicações lineares

$$T_{a_1,...,a_{m-1}} = T\left(a_1, ..., a_{m-1}, \cdot\right), ..., T_{a_2,...,a_m} = T\left(\cdot, a_2, ..., a_m\right).$$

Proposição 3.2.7 *Sejam* $a = (a_1, ..., a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ *e* $T \in \mathcal{L}^{(a)}_{as(p;q_1,...,q_m)}\left(E_1, ..., E_m; F\right)$. *Então:*

(i) $T_{a_{j_1},...,a_{j_r}}$ *é* $(p; q_{k_1}, ..., q_{k_s})$*-somante, sempre que*

$$\{1, ..., m\} = \{j_1, ..., j_r\} \cup \{k_1, ..., k_s\},$$

com $k_1 \leq \cdots \leq k_s$ *e* $\{j_1, ..., j_r\} \cap \{k_1, ..., k_s\} = \phi$;

(ii) $T \in \mathcal{L}^{(b)}_{as(p;q_1,...,q_m)}\left(E_1, ..., E_m; F\right)$ *para todo*

$$b \in \{(\lambda_1 a_1, ..., \lambda_m a_m)\,; \lambda_j \in \mathbb{K}, j = 1, ..., m\}.$$

Em particular, T *é* $(p; q_1, ..., q_m)$*-somante na origem.*

Demonstração. (i) Para o operador linear $T_{a_1,...,a_{m-1}}$, observe que

$$T_{a_1,...,a_{m-1}}\left(x_j^{(m)}\right) = T\left(a_1 + 0, a_2 + 0, ..., a_{m-1} + 0, a_m + x_j^{(m)}\right) - T\left(a_1, ..., a_m\right). \tag{3.29}$$

Como T é $(p; q_1, ..., q_m)$-somante em a, de (3.29) temos que $T_{a_1,...,a_{m-1}}$ é $(p; q_m)$-somante. Os casos dos operadores $T_{a_1,...,a_{m-2},a_m}, ..., T_{a_2,...,a_m}$ são análogos.

Para a aplicação bilinear $T_{a_1,...,a_{m-2}}$, observe que

$$\begin{aligned}
&\left(T_{a_1,...,a_{m-2}}\left(x_j^{(m-1)}, x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \qquad (3.30)\\
&= \left(T\left(a_1 + 0, a_2 + 0, ..., a_{m-2} + 0, a_{m-1} + x_j^{(m-1)}, a_m + x_j^{(m)}\right) - T\left(a_1, ..., a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty}\\
&- \left(T\left(a_1, a_2, ..., a_{m-1}, x_j^{(m)}\right) + T\left(a_1, a_2, ..., a_{m-2}, x_j^{(m-1)}, a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty}\\
&= \left(T\left(a_1 + 0, a_2 + 0, ..., a_{m-2} + 0, a_{m-1} + x_j^{(m-1)}, a_m + x_j^{(m)}\right) - T\left(a_1, ..., a_m\right)\right)_{j=1}^{\infty}\\
&- \left(T_{a_1,...,a_{m-1}}\left(x_j^{(m)}\right) + T_{a_1,...,a_{m-2},a_m}\left(x_j^{(m-1)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}
\end{aligned}$$

De (3.30), usando a hipótese e o caso anterior, segue que $T_{a_1,...,a_{m-2}}$ é $(p; q_{m-1}, q_m)$-somante. Os outros casos de aplicações bilineares são análogas ao anterior. Procedendo de forma similar teremos os demais casos.

(ii) Seja $b = (\lambda_1 a_1, ..., \lambda_m a_m)$.

Se $\lambda_j \neq 0$ para todo j, note que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(\lambda_1 a_1 + x_j^{(1)}, ..., \lambda_m a_m + x_j^{(m)}\right) - T\left(\lambda_1 a_1, ..., \lambda_m a_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(\lambda_1 a_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1}x_j^{(1)}, ..., \lambda_m a_m + \frac{\lambda_m}{\lambda_m}x_j^{(m)}\right) - T\left(\lambda_1 a_1, ..., \lambda_m a_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \lambda_1 \cdots \lambda_m \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(a_1 + \frac{1}{\lambda_1}x_j^{(1)}, ..., a_m + \frac{1}{\lambda_m}x_j^{(m)}\right) - T\left(a_1, ..., a_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto T é $(p; q_1, ..., q_m)$-somante em $b = (\lambda_1 a_1, ..., \lambda_m a_m)$, $\lambda_j \neq 0$ para todo j.

Se $\lambda_j = 0$, para algum j, faremos o caso $m = 3$ (os casos $m \neq 3$ são similares).

Suponhamos que T é $(p; q_1, q_2, q_3)$-somante em $a = (a_1, a_2, a_3)$. De (i), sabemos que, na origem, T é $(p; q_1, q_2, q_3)$-somante, T_{a_1} é $(p; q_2, q_3)$-somante, T_{a_2} é $(p; q_1, q_3)$-somante, T_{a_3} é $(p; q_1, q_2)$-somante, T_{a_1,a_2} é $(p; q_3)$-somante, T_{a_1,a_3} é $(p; q_2)$-somante e $T_{a_2 a_3}$ é $(p; q_1)$-somante.

– **Caso** $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ **e** $\lambda_3 = 0$.

Segue facilmente das igualdades abaixo:

$$\begin{aligned}
&T(\lambda_1 a_1 + x_j, \lambda_2 a_2 + y_j, z_j) - T(\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, 0) \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \left[T\left(a_1 + \frac{x_j}{\lambda_1}, a_2 + \frac{y_j}{\lambda_2}, z_j\right) - T(a_1, a_2, 0) \right] \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \left[T(a_1, a_2, z_j) + T\left(\frac{x_j}{\lambda_1}, a_2, z_j\right) + T\left(a_1, \frac{y_j}{\lambda_2}, z_j\right) + T\left(\frac{x_j}{\lambda_1}, \frac{y_j}{\lambda_2}, z_j\right) \right] \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \left[T_{a_1,a_2}(z_j) + T_{a_2}\left(\frac{x_j}{\lambda_1}, z_j\right) + T_{a_1}\left(\frac{y_j}{\lambda_2}, z_j\right) + T\left(\frac{x_j}{\lambda_1}, \frac{y_j}{\lambda_2}, z_j\right) \right].
\end{aligned}$$

– **Os casos** $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$ **e** $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$ são análogos**.**

– **Caso** $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Segue de

$$\begin{aligned}
T(\lambda_1 a_1 + x_j, y_j, z_j) - T(\lambda_1 a_1, 0, 0) &= \lambda_1 \left[T\left(a_1 + \frac{x_j}{\lambda_1}, y_j, z_j\right) \right] \\
&= \lambda_1 \left[T(a_1, y_j, z_j) + T\left(\frac{x_j}{\lambda_1}, y_j, z_j\right) \right] \\
&= \lambda_1 \left[T_{a_1}(y_j, z_j) + T(\frac{x_j}{\lambda_1}, y_j, z_j) \right].
\end{aligned}$$

– **Os casos** $\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = \lambda_3 = 0$ **e** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$ são análogos**.**

– **Caso** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

De (i), temos que T é $(p; q_1, q_2, q_3)$-somante na origem. ■

O próximo resultado será importante na demonstração do Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para Aplicações Multilineares (Teorema 3.2.9).

Lema 3.2.8 *Se* $p \geq q_j \geq 1$, $j = 1, ..., m$ *e* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$ *é de tipo finito, então* T *é absolutamente* $(p; q_1, ..., q_m)$*-somante em todo ponto.*

Demonstração. Como $p \geq q_j \geq 1$, $j = 1, ..., m$, para todo $\left(x_k^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(E_k)$, temos

$$\left\| \left(x_k^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \leq \left\| \left(x_k^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q_j} \forall j = 1, ..., m.$$

Vamos mostrar que para todo $m \in \mathbb{N}$, a aplicação

$$B_m : E_1 \times \cdots \times E_m \to F : B_m(x_1, ..., x_m) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m) b,$$

com $\varphi_k \in E_k'$, $k = 1, ..., m$ e $b \in F$, é absolutamente $(p; p, ..., p)$-somante na origem. Seja

$\left(x_k^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w\left(E_k\right), k=1,...,m.$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\left\|B_m\left(x_1^{(j)},...,x_m^{(j)}\right)\right\|^p &= \sum_{j=1}^{\infty}\left\|\varphi_1\left(x_1^{(j)}\right)\cdots\varphi_m\left(x_m^{(j)}\right)b\right\|^p \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\|\varphi_1\|\cdots\|\varphi_{m-1}\|\left\|x_1^{(j)}\right\|\cdots\left\|x_{m-1}^{(j)}\right\|\|b\|\left|\varphi_m\left(x_m^{(j)}\right)\right|\right)^p \\
&\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_m\left(x_m^{(j)}\right)\right|^p < \infty.
\end{aligned}$$

O caso geral (em todo ponto) é conseqüência simples do que foi mostrado. ■

A seguir, demonstramos uma versão do Teorema de Dvoretzky-Rogers no contexto de aplicações multilineares.

Teorema 3.2.9 (Teorema de Dvoretzky-Rogers para Aplicações Multilineares) *Sejam E um espaço de Banach, $m \geq 2$ e $p \geq 1$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) E tem dimensão infinita;

(ii) $\mathcal{L}_{as,p}^{(a)}\left({}^mE;E\right) \neq \mathcal{L}\left({}^mE;E\right)$ para todo $a=(a_1,...,a_m) \in E^m$ com $a_i \neq 0$ para todo i ou $a_i = 0$ para um único i;

(iii) $\mathcal{L}_{as,p}^{(a)}\left({}^mE;E\right) \neq \mathcal{L}\left({}^mE;E\right)$ para algum $a=(a_1,...,a_m) \in E^m$ com $a_i \neq 0$ para todo i ou $a_i = 0$ para um único i.

Demonstração. $(ii) \Rightarrow (iii)$ Óbvio.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponha que a dimensão de E seja finita. Sejam $\{e_1,...,e_n\}$ e $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ bases de E e E' respectivamente, onde $\varphi_j(e_k) = \delta_{jk}$. Cada $x \in E$ pode ser escrito por

$$x = \sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\,e_j.$$

Daí, se $T \in \mathcal{L}\left({}^mE;E\right)$, teremos

$$\begin{aligned}
T(x_1,...,x_m) &= T\left(\sum_{j_1=1}^{n}\varphi_{j_1}(x_1)\,e_{j_1},...,\sum_{j_m=1}^{n}\varphi_{j_m}(x_m)\,e_{j_m}\right) \\
&= \sum_{j_1,...,j_m=1}^{n}\varphi_{j_1}(x_1)\cdots\varphi_{j_m}(x_m)\,T\left(e_{j_1},...,e_{j_m}\right).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2.8, T é absolutamente p-somante em todo ponto, e isso contradiz (iii).

$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $a=(a_1,...,a_m) \in E^m$com $a_i \neq 0$ para todo i ou $a_i = 0$ para um único i. Fixe $k \in \{1,...,m\}$ tal que $a_i \neq 0$ para todo $i \neq k$. Para cada $i \neq k$ escolha $\varphi_i \in E'$ com $\varphi_i(a_i) = 1$ e defina $T \in \mathcal{L}\left({}^mE;E\right)$ por

$$T(x_1,...,x_m) = \varphi_1(x_1)\overset{[k]}{\cdots}\varphi_m(x_m)\,x_k.$$

Note que $T_{a_1,...,a_{k-1},a_{k+1},...,a_m}(x) = T(a_1,...,a_{k-1},x,a_{k+1},...,a_m) = x$ para qualquer $x \in E$. Logo, pelo TDR, $T_{a_1,...,a_{k-1},a_{k+1},...,a_m}$ não é p-somante. Pela Proposição 3.2.7 (i), segue que T não é p-somante em a. ■

Corolário 3.2.10 *Sejam E um espaço de Banach de dimensão infinita, $a = (a_1, ..., a_m) \in E^m$, $m \geq 2$ e $p \geq 1$. Se $\mathcal{L}_{as,p}^{(a)} ({}^m E; E) = \mathcal{L} ({}^m E; E)$, então a cardinalidade do conjunto $\{i : a_i = 0\}$ é maior ou igual a 2. Em particular, se $\mathcal{L}_{as,p}^{(a)} \left({}^2 E; E\right) = \mathcal{L} \left({}^2 E; E\right)$ então a é a origem.*

Demonstração. Com efeito, se $\mathcal{L}_{as,p}^{(a)} ({}^m E; E) = \mathcal{L} ({}^m E; E)$, pelo Teorema 3.2.9, $a_i = 0$ para mais de um i, ou seja, a cardinalidade do conjunto $\{i : a_i = 0\}$ é maior ou igual a 2. A segunda afirmação é uma conseqüência imediata da primeira. ■

Teorema de Dvoretzky-Rogers para Polinômios Homogêneos

O seguinte resultado (fundamental para a demonstração do TDR para polinômios) será demonstrado com um argumento mais simples que o original em [1]. Sua idéia é baseada numa comunicação privada de R. Ryan a D. Pellegrino:

Proposição 3.2.11 *$P \in \mathcal{P} ({}^m E; F)$ é $(p; q)$-somante em $a \in E$ se e somente se $\check{P}$ é $(p; q, ..., q)$-somante em $(a, ..., a) \in E^m$.*

Demonstração. Se $\check{P}$ é $(p; q, ..., q)$-somante em $(a, ..., a) \in E^m$, como

$$P (a + x_j) - P (a) = \check{P} (a + x_j, ..., a + x_j) - \check{P} (a, ..., a) ,$$

segue que P é $(p; q)$-somante em a.

Reciprocamente, suponha que P é $(p; q)$-somante em a. Sejam

$$\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E),\ k = 1, ..., m.$$

Usando a Fórmula de Polarização (Teorema 1.2.18), obtemos, para cada $j \in \mathbb{N}$, e cada $x_0 \in E$,

$$\begin{aligned} & m!2^m \left[\check{P} \left(a + x_j^{(1)}, ..., a + x_j^{(m)}\right) - P (a, ..., a)\right] \qquad (3.31) \\ &= \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P \left(x_0 + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \left(a + x_j^{(k)}\right)\right) - \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P (x_0 + \varepsilon_1 a + \cdots + \varepsilon_m a) \\ &= \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \left[\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P \left(x_0 + \left(\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k a\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k x_j^{(k)}\right)\right) - P (x_0 + \varepsilon_1 a + \cdots + \varepsilon_m a)\right]. \end{aligned}$$

Se $a = 0$, usando (3.31) com $x_0 = 0$, é fácil ver que $\check{P}$ é $(p; q, ..., q)$-somante.

Vamos supor $a \neq 0$. Como a igualdade (3.31) é válida para qualquer escolha de x_0 em E, vamos escolher $x_0 = (m + 1) a$. É claro que para essa escolha de x_0, temos

$$x_0 + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k a = \lambda a \neq 0.$$

Como P é $(p; q)$-somante em a, então, para qualquer $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, temos que P é $(p; q)$-somante em λa. Com efeito, basta observar as igualdades abaixo:

$$P (\lambda a + x_j) - P (\lambda a) = P \left(\lambda \left(a + \frac{x_j}{\lambda}\right)\right) - P (\lambda a) = \lambda^m \left[P \left(a + \frac{1}{\lambda} x_j\right) - P (a)\right].$$

Logo, segue que P é (p, q)-somante em $(x_0 + (\varepsilon_1 a + \cdots + \varepsilon_m a))$ e, de (3.31), temos que $\check{P}$ é $(p; q, ..., q)$-somante em $(a, ..., a)$. ■

Corolário 3.2.12 *Seja* $P \in \mathcal{P}^{(a)}_{as(p,q)}\left({}^mE;F\right)$*. Então* P *é* $(p;q)$*-somante em* λa *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Em particular,* P *é* $(p;q)$*-somante na origem.*

Demonstração. Pela Proposição 3.2.11, $\check{P}$ é $(p;q)$-somante em a. Segue da Proposição 3.2.7 que $\check{P}$ é $(p;q)$-somante em λa para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Novamente, pela Proposição 3.2.11, temos que P é $(p;q)$-somante em λa para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Quando $\lambda = 0$ temos que P é $(p;q)$-somante na origem. ■

Teorema 3.2.13 (Teorema de Dvoretzky-Rogers para Polinômios Homogêneos) *Sejam* E *um espaço de Banach,* $m \geq 2$ *e* $p \geq 1$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *E tem dimensão infinita;*

(ii) $\mathcal{P}^{(a)}_{as,p}\left({}^mE;E\right) \neq \mathcal{P}\left({}^mE;E\right)$ *para todo* $a \in E$*,* $a \neq 0$*;*

(iii) $\mathcal{P}^{(a)}_{as,p}\left({}^mE;E\right) \neq \mathcal{P}\left({}^mE;E\right)$ *para algum* $a \in E$*,* $a \neq 0$*.*

Demonstração. $(ii) \Rightarrow (iii)$ Óbvio.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Se E tem dimensão finita, sejam $\{e_1,...,e_n\}$ e $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ bases de E e E', respectivamente, tais que $\varphi_j\left(e_k\right) = \delta_{jk}$. Dado $P \in \mathcal{P}\left({}^mE;E\right)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\check{P}\left(x_1,...,x_m\right) &= \check{P}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\left(x_1\right)e_j,...,\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\left(x_m\right)e_j\right)\\ &= \sum_{j_1,...,j_m=1}^{n}\varphi_{j_1}\left(x_1\right)\cdots\varphi_{j_m}\left(x_m\right)\check{P}\left(e_{j_1},...,e_{j_m}\right).\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2.8, $\check{P}$ é absolutamente p-somante em todo ponto e, pela Proposição 3.2.11, P é absolutamente p-somante em todo ponto.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $a \in E$, $a \neq 0$. Escolha $\varphi \in E'$ com $\varphi\left(a\right) = 1$ e defina $P \in \mathcal{P}\left({}^mE;E\right)$ por $P\left(x\right) = \varphi\left(x\right)^{m-1}x$. Suponha que P é p-somante em $a \in E$. Pela Proposição 3.2.11 temos que $\check{P}$ é p-somante em $(a,...,a)$. Defina $P_a \in \mathcal{L}\left(E;E\right)$ por

$$P_a\left(x\right) = \check{P}\left(a,...,a,x\right).$$

Como

$$P_a\left(x\right) = \check{P}\left(a+0,...,a+0,a+x\right) - \check{P}\left(a,...,a\right)$$

para qualquer x em E, temos que P_a é absolutamente p-somante. Note que

$$\check{P}\left(x_1,...,x_m\right) = \frac{1}{m!}\sum_{i=1}^{m}\varphi\left(x_1\right)\overset{[i]}{\cdots}\varphi\left(x_m\right)x_i$$

para quaisquer $x_1,...,x_m$ em E. Logo

$$P_a\left(x\right) = \check{P}\left(a,...,a,x\right) = \left(\frac{m-1}{m!}\right)\varphi\left(x\right)a + \frac{1}{m!}x$$

para qualquer x em E, e assim

$$id\left(x\right) = m!P_a\left(x\right) - \left(m-1\right)\varphi\left(x\right)a.$$

Segue que o operador identidade de E é absolutamente p-somante. Pelo TDR concluímos que $\dim E < \infty$. ■

3.2.2 Uma norma natural em $\mathcal{L}^{ev}_{as(p;q_1,...,q_m)}$ e $\mathcal{P}^{ev}_{as(p;q)}$

Denotaremos

$$\mathcal{L}^{ev}_{as(p;q_1,...,q_m)} = \bigcup_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ E_1,...,E_m,F \text{ Banach}}} \mathcal{L}^{ev}_{as(p;q_1,...,q_m)}(E_1,...,E_m;F)$$

e

$$\mathcal{P}^{ev}_{as(p;q)} = \bigcup_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ E,F \text{ Banach}}} \mathcal{P}^{ev}_{as(p;q)}(^mE;F)$$

Nessa seção veremos que há normas naturais para $\mathcal{L}^{ev}_{as(p;q_1,...,q_m)}$ e $\mathcal{P}^{ev}_{as(p;q)}$ que os tornam ideais normados, mas suas definições necessitam de alguns cuidados e resultados auxiliares.

Caso Multilinear

Lema 3.2.14 *Se $T \in \mathcal{L}^{ev}_{as(p;q_1,...,q_m)}(E_1,...,E_m;F)$ e $(a_1,...,a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, então existe uma constante $C_{a_1,...,a_m} \geq 0$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_m + x_j^{(m)}\right) - T(a_1,...,a_m)\right\|^p \leq C_{a_1,...,a_m}$$

sempre que $\left(x_j^{(s)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l^w_{q_s}(E_s)$ e $\left\|\left(x_j^{(s)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_s} \leq 1,\ s = 1,...,m.$

Demonstração. Faremos para o caso $m = 2$. O caso geral é análogo. Sejam $T \in \mathcal{L}^{ev}_{as(p;q_1,...,q_m)}(E_1,E_2;F)$ e $(a,b) \in E_1 \times E_2$. Note que os operadores $T(a,\cdot)$ e $T(\cdot,b)$ são absolutamente $(p;q_1)$ e $(p;q_2)$-somantes, respectivamente (isso é conseqüência da Proposição 3.2.7). Assim, pelas Proposições 3.1.4 e 3.2.3, segue que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(a+x_j, b+y_j) - T(a,b)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(a,y_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j,b)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j,y_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_1 \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_2} + C_2 \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_1} \\
&+ C_3 \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_1} \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_2} \\
&\leq C_{a,b}
\end{aligned}$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{l^w_{q_1}(E_1)}$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{l^w_{q_2}(E_2)}$. ■

Teorema 3.2.15 *As seguintes afirmações são equivalentes para $T \in \mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$:*

(i) $T \in \mathcal{L}^{ev}_{as(p;q)}(E_1,...,E_m;F)$;

(*ii*) *Existe* $C > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|T\left(b_1+x_j^{(1)},...,b_m+x_j^{(m)}\right)-T\left(b_1,...,b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C\left(\|b_1\|+\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}\right)\cdots\left(\|b_m\|+\left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}\right),$$

para quaisquer $n\in\mathbb{N}$, $x_j^{(k)}\in E_k$, $b_j\in E_j$, *com* $k=1,...,m$ *e* $j=1,...,n$;

(*iii*) *Existe* $C>0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(b_1+x_j^{(1)},...,b_m+x_j^{(m)}\right)-T\left(b_1,...,b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.32}$$
$$\leq C\left(\|b_1\|+\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)\cdots\left(\|b_m\|+\left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)$$

para todo $(b_1,...,b_m)\in E_1\times\cdots\times E_m$ *e* $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_q^w\left(E_r\right), r=1,...,m$. *Mais ainda, o ínfimo de todas as constantes* C *para as quais a desigualdade (3.32) é satisfeita define uma norma em* $\mathcal{L}_{as(p;q)}^{ev}\left(E_1,...,E_m;F\right)$, *e será denotada por* $\|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}$.

Demonstração. $(iii)\Rightarrow(i)$ e $(iii)\Rightarrow(ii)$ são triviais.

$(ii)\Rightarrow(iii)$ A mesma idéia de $(ii)\Rightarrow(iii)$ da Proposição 3.1.4.

$(i)\Rightarrow(iii)$ Defina $G_r=E_r\times l_q^w\left(E_r\right)$, $r=1,...,m$, com a norma da soma, e considere a aplicação m-linear

$$\Phi_{p;q}\left(T\right):G_1\times\cdots\times G_m\longrightarrow l_p\left(F\right)$$

dada por

$$\left(\left(b_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right),...,\left(b_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\longrightarrow\left(T\left(b_1+x_j^{(1)},...,b_m+x_j^{(m)}\right)-T\left(b_1,...,b_m\right)\right)_{j=1}^{\infty}.$$

Vamos mostrar que $\Phi_{p;q}\left(T\right)$ é contínua.

O conjunto

$$F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}}$$
$$=\left\{(b_1,...,b_m)\in E_1\times\cdots\times E_m;\left\|\Phi_{p;q}\left(T\right)\left(\left(b_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right),...,\left(b_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_p\leq k\right\}$$

é fechado em $E_1\times\cdots\times E_m$ para todo número natural k e $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\in B_{l_q^w(E_r)}, r=1,...,m$. Com efeito, para cada n natural, seja

$$F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}}$$
$$=\left\{(b_1,...,b_m)\in E_1\times\cdots\times E_m;\left\|\Phi_{p;q}\left(T\right)\left(\left(b_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n}\right),...,\left(b_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}\right)\right)\right\|_p\leq k\right\}.$$

Assim

$$F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n},...,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}}.$$

Para cada $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in B_{l_q^w(E_r)}, r = 1, ..., m$ e n fixo, a aplicação

$$S_n : E_1 \times \cdots \times E_m \to [0, \infty),$$

dada por

$$S_n\left(b_1, ..., b_m\right) = \sum_{j=1}^{n} \left\| \left(T\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T\left(b_1, ..., b_m\right) \right) \right\|^p,$$

é contínua. Logo, cada $F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n}, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}}$ é fechado, pois

$$F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n}, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}} = S_n^{-1}\left([0, k]\right).$$

Conseqüentemente, $F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}}$ é fechado, pois é interseção de conjuntos fechados.

Considere

$$F_k := \bigcap F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}},$$

com a interseção tomada sobre todas $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in B_{l_q^w(E_r)}, r = 1, ..., m.$

Pelo Lema 3.2.14,

$$E_1 \times \cdots \times E_m = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k.$$

Pelo Teorema de Baire, existe k_0 tal que F_{k_0} tem interior não vazio. Seja $(b_1, ..., b_m)$ um elemento do interior de F_{k_0}. Assim, existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que

$$\left\| \Phi_{p;q}\left(T\right) \left(\left(c_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right), ..., \left(c_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) \right) \right\|_p \leq k_0 \tag{3.33}$$

sempre que $\|c_r - b_r\| < \varepsilon$ e $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in B_{l_q^w(E_r)}, r = 1, ..., m.$

Se

$$\left\| \left(v_r, \left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) \right\| < \varepsilon$$

para todo $r = 1, ..., m$, temos

$$\|v_r\| < \varepsilon \text{ e } \left\| \left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} < \varepsilon < 1.$$

Logo, usando (3.33), segue que

$$\begin{aligned} &\left\| \Phi_{p;q}\left(T\right) \left[\left(\left(b_1, (0)_{j=1}^{\infty}\right), ..., \left(b_m, (0)_{j=1}^{\infty}\right) \right) + \left(\left(v_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right), ..., \left(v_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) \right) \right] \right\|_p \\ &= \left\| \Phi_{p;q}\left(T\right) \left[\left(b_1 + v_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right), ..., \left(b_m + v_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) \right] \right\|_p \leq k_0, \end{aligned}$$

pois

$$\|(b_j + v_j) - b_j\| = \|v_r\| < \varepsilon$$

e

$$\left\| \left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} < \varepsilon < 1.$$

Portanto $\Phi_{p;q}(T)$ é limitada na bola de raio ε e centro no ponto

$$\left(\left(b_1,(0)_{j=1}^{\infty}\right),...,\left(b_m,(0)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\in G_1\times\cdots\times G_m.$$

Pelo Teorema 1.2.2, segue que $\Phi_{p;q}(T)$ é contínua. Logo, se $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_q^w(E)$, $r=1,...,m$, temos

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\left(T\left(b_1+x_j^{(1)},...,b_m+x_j^{(m)}\right)-T\left(b_1,...,b_m\right)\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left\|\Phi_{p;q}(T)\left(\left(b_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right),...,\left(b_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_p\\&\leq\left\|\Phi_{p;q}(T)\right\|\left(\|b_1\|+\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)\cdots\left(\|b_m\|+\left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right).\end{aligned}\tag{3.34}$$

Note que da definição de $\Phi_{p;q}(T)$ segue que

$$\|T\|_{ev^{(2)}(p;q)}=\left\|\Phi_{p;q}(T)\right\|$$

e que o "ínfimo" é atingido.

Agora vamos mostrar que $\|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}$ é realmente uma norma em $\mathcal{L}_{as(p;q)}^{ev}(E_1,...,E_m;F)$:

Claramente $\|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}\geq 0$ e $\|T\|_{ev^{(2)}(p;q)}=0\Leftrightarrow T=0$.

Seja $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\neq 0$. Então

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\lambda T\left(b_1+x_j^{(1)},...,b_m+x_j^{(m)}\right)-\lambda T\left(b_1,...,b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=|\lambda|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(b_1+x_j^{(1)},...,b_m+x_j^{(m)}\right)-T\left(b_1,...,b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leq|\lambda|\,\|T\|_{ev^{(2)}(p;q)}\left(\|b_1\|+\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)\cdots\left(\|b_m\|+\left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right).\end{aligned}\tag{3.35}$$

De

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\lambda T\left(b_1+x_j^{(1)},...,b_m+x_j^{(m)}\right)-\lambda T\left(b_1,...,b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leq\|\lambda T\|_{ev^{(2)}(p;q)}\left(\|b_1\|+\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)\cdots\left(\|b_m\|+\left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right),\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(b_1+x_j^{(1)},...,b_m+x_j^{(m)}\right)-T\left(b_1,...,b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leq\frac{\|\lambda T\|_{ev^{(2)}(p;q)}}{|\lambda|}\left(\|b_1\|+\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)\cdots\left(\|b_m\|+\left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right).\end{aligned}\tag{3.36}$$

Por (3.35) e (3.36) temos $\|\lambda T\|_{ev^{(2)}(p;q)} = |\lambda| \, \|T\|_{ev^{(2)}(p;q)}$.

Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_{as(p;q)}^{ev}\left(E_1, ..., E_m; F\right)$. Então

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T_1\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T_1\left(b_1, ..., b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.37}$$
$$\leq \|T_1\|_{ev^{(2)}(p;q)} \left(\|b_1\| + \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right) \cdots \left(\|b_m\| + \left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)$$

e

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T_2\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T_2\left(b_1, ..., b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.38}$$
$$\leq \|T_2\|_{ev^{(2)}(p;q)} \left(\|b_1\| + \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right) \cdots \left(\|b_m\| + \left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right).$$

Pela Desigualdade de Minkowski, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| (T_1 + T_2)\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - (T_1 + T_2)\left(b_1, ..., b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T_1\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T_1\left(b_1, ..., b_m\right)\right\|\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+ \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T_2\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T_2\left(b_1, ..., b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e, pelas desigualdades (3.37) e (3.38), temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| (T_1 + T_2)\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - (T_1 + T_2)\left(b_1, ..., b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.39}$$
$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T_1\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T_1\left(b_1, ..., b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+ \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T_2\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T_2\left(b_1, ..., b_m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \|T_1\|_{ev^{(2)}(p;q)} \left(\|b_1\| + \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right) \cdots \left(\|b_m\| + \left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)$$
$$+ \|T_2\|_{ev^{(2)}(p;q)} \left(\|b_1\| + \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right) \cdots \left(\|b_m\| + \left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right).$$

Segue de (3.39) que

$$\|(T_1 + T_2)\|_{ev^{(2)}(p;q)} \leq \|T_1\|_{ev^{(2)}(p;q)} + \|T_2\|_{ev^{(2)}(p;q)},$$

e portanto $\|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}$ define uma norma em $\mathcal{L}_{as(p;q)}^{ev}\left(E_1, ..., E_m; F\right)$. ■

Observação 3.2.16 *A razão da notação $ev^{(2)}$ é que há uma definição anterior, devida a M. C. Matos (veja [19]), que foi denotada na literatura por $ev^{(1)}$. A norma $ev^{(2)}$ tem algumas vantagens computacionais (para detalhes comparativos entre as duas normas, veja [1]).*

Na próxima proposição usaremos as notações da demonstração do teorema anterior.

Proposição 3.2.17 *A aplicação*

$$\Phi_{p;q} : \mathcal{L}^{ev}_{as(p;q)}\left(E_1, ..., E_m; F\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left(G_1, ..., G_m; l_p\left(F\right)\right)$$

é linear, injetiva e tem imagem fechada em $\mathcal{L}\left(G_1, ..., G_m; l_p\left(F\right)\right)$.

Demonstração. $\Phi_{p;q}$ está bem definida pelo Teorema 3.2.15. É facil verificar que $\Phi_{p;q}$ é linear e injetiva.

Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em $\mathcal{L}^{ev}_{as(p;q)}\left(E_1, ..., E_m; F\right)$ com $\Phi_{p;q}\left(T_n\right)$ convergindo para A na norma $\|.\|_{ev^{(2)}(p;q)}$. Logo

$$\left\|\Phi_{p;q}\left(T_n\right) - A\right\|_{ev^{(2)}(p;q)} \to 0$$

e daí segue que

$$\left\|\Phi_{p;q}\left(T_n\right) - A\right\| \to 0,$$

pois $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}$. Portanto

$$\Phi_{p;q}\left(T_n\right)(x) \to A(x) \text{ para todo } x \in G_1 \times \cdots \times G_m.$$

Note que

$$\Phi_{p;q}\left(T_n\right)\left((0, (x_1, 0, 0, ...), ..., (0, (x_m, 0, 0, ...)\right) = \left(T_n\left(x_1, ..., x_m\right), 0, 0, ...\right).$$

Se, para cada $j \in \mathbb{N}$, π_j é a projeção na j-ésima coordenada, nós temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} T_n\left(x_1, ..., x_m\right) &= \lim_{n\to\infty} \pi_1\left(\left(T_n\left(x_1, ..., x_m\right), 0, 0, ...\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1\left(\Phi_{p;q}\left(T_n\right)\left((0, (x_1, 0, 0, ...), ..., (0, (x_m, 0, 0, ...)\right)\right) \\
&= \pi_1\left(\lim_{n\to\infty}\left[\Phi_{p;q}\left(T_n\right)\left((0, (x_1, 0, 0, ...), ..., (0, (x_m, 0, 0, ...)\right)\right]\right) \\
&= \pi_1\left(A\left((0, (x_1, 0, 0, ...), ..., (0, (x_m, 0, 0, ...)\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Assim, podemos definir $T \in L\left(E_1, ..., E_m; F\right)$ por

$$T\left(x_1, ..., x_m\right) := \lim_{n\to\infty} T_n\left(x_1, ..., x_m\right).$$

Note que, de (3.40) segue que T está bem definida, e é fácil ver que T é m-linear, embora a continuidade não seja, em princípio, clara. Entretanto, o Teorema de Banach-Steinhaus para aplicações multilineares garante que T é contínua.

Sejam $(b_1,...,b_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E_r), r = 1,...,m$. Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(T\left(b_1 + x_j^{(1)},...,b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1,...,b_m)\right)_{j=1}^{k}\right\|_p \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k}\left\|\left(T\left(b_1 + x_j^{(1)},...,b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1,...,b_m)\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\left\|\left(T_n\left(b_1 + x_j^{(1)},...,b_m + x_j^{(m)}\right) - T_n(b_1,...,b_m)\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\|\Phi_{p;q}(T_n)\left(\left(b_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{k}\right),...,\left(b_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{k}\right)\right)\right\|_p \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\|\Phi_{p;q}(T_n)\|\prod_{r=1}^{m}\left(\|b_r\| + \left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{k}\right\|_{w,q}\right) \\
&= \|A\|\prod_{r=1}^{m}\left(\|b_r\| + \left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{k}\right\|_{w,q}\right) \\
&\leq \|A\|\prod_{r=1}^{m}\left(\|b_r\| + \left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right),
\end{aligned}$$

mostrando que $T \in \mathcal{L}_{as(p;q)}^{ev}(E_1,...,E_m;F)$.

Mais ainda, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
&\pi_j\left[A\left(\left(b_1,\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right),...,\left(b_m,\left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right)\right] \\
&= \pi_j\left[\lim_{n\to\infty}\Phi_{p;q}(T_n)\left(\left(b_1,\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right),...,\left(b_m,\left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right)\right] \\
&= \pi_j\left[\lim_{n\to\infty}\left(T_n\left(b_1 + x_i^{(1)},...,b_m + x_i^{(m)}\right) - T_n(b_1,...,b_m)\right)_{i=1}^{\infty}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\pi_j\left(\left(T_n\left(b_1 + x_i^{(1)},...,b_m + x_i^{(m)}\right) - T_n(b_1,...,b_m)\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[T_n\left(b_1 + x_j^{(1)},...,b_m + x_j^{(m)}\right) - T_n(b_1,...,b_m)\right] \\
&= T\left(b_1 + x_j^{(1)},...,b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1,...,b_m)
\end{aligned}$$

para todo $j = 1,2,3,...$. Logo

$$A\left(\left(b_1,\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right),...,\left(b_m,\left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right) = \Phi_{p;q}(T)\left(\left(b_1,\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right),...,\left(b_m,\left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right).$$

Assim, $\Phi_{p;q}(T) = A$, e portanto A pertence à imagem de $\Phi_{p;q}$. ■

Observe que se E é um espaço vetorial, F é um espaço de Banach e $f : E \to F$ é uma aplicação linear injetiva com imagem fechada em F, então a aplicação

$$\|\cdot\|_E : E \longrightarrow [0,+\infty) : \|x\|_E = \|f(x)\|$$

define uma norma em E e, além disso, $(E,\|\cdot\|_E)$ é um espaço completo. De fato, é óbvio que

$$\|x\|_E \geq 0 \text{ para todo } x \in E$$

e

$$\|x\|_E = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Para $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\|\lambda x\|_E = \|f(\lambda x)\| = \|\lambda f(x)\| = |\lambda| \|f(x)\| = |\lambda| \|x\|_E$$

e, para quaisquer $x, y \in E$,

$$\|x+y\|_E = \|f(x+y)\| = \|f(x) + f(y)\| \leq \|f(x)\| + \|f(y)\| = \|x\|_E + \|y\|_E.$$

Agora, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em E. Então $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em F e, como F é espaço de Banach, segue que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge, digamos para $y \in F$. Como a imagem de f é fechada, segue que existe x em E com $f(x) = y$. Logo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para x, pois

$$\|x_n - x\|_E = \|f(x_n - x)\| = \|f(x_n) - y\|.$$

Usando o Teorema 3.2.15, a Proposição 3.2.17 e a observação acima, segue que a correspondência

$$T \in \mathcal{L}_{as(p;q)}^{ev}(E_1, ..., E_m; F) \mapsto \|T\|_{ev^{(2)}(p;q)} = \|\Phi_{p;q}(T)\|$$

torna $\mathcal{L}_{as(p;q)}^{ev}(E_1, ..., E_m; F)$ um espaço de Banach.

A seguir, vemos que a norma natural para $\mathcal{P}_{as(p;q)}^{ev}(E; F)$ é obtida de maneira similar ao caso multilinear.

Caso Polinomial

Teorema 3.2.18 *As seguintes afirmações são equivalentes para* $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$:

(*i*) $P \in \mathcal{P}_{as(p;q)}^{ev}(^m E; F)$;

(*ii*) *Existe* $C > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|P(b + x_k) - P(b)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\|b\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}\right)^m,$$

para quaisquer $x_1, ..., x_n, b$ *em* E *e* n *natural ;*

(*iii*) *Existe* $C > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(b + x_j) - P(b)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\|b\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^m \tag{3.41}$$

para todo $b \in E$ *e* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$. *Mais ainda, o ínfimo de todas as constantes* C *para as quais a desigualdade (3.41) é satisfeita define uma norma em* $\mathcal{P}_{as(p;q)}^{ev}(^m E; F)$, *e será denotada por* $\|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}$.

Demonstração. $(iii) \Rightarrow (i)$ e $(iii) \Rightarrow (ii)$ são óbvias.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ segue a mesma idéia da demonstração da Proposição 3.1.4.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Defina $G = E \times l_q^w(E)$ e o polinômio m-homogêneo

$$\eta_{p;q}(P) : G \to l_p(E) : \left(b, (x_j)_{j=1}^{\infty}\right) \longmapsto (P(b + x_j) - P(b))_{j=1}^{\infty}.$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$, considere

$$F_{k,(x_j)_{j=1}^{\infty}} = \left\{b \in E : \left\|\eta_{p;q}(P)\left(b, (x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_p \leq k\right\}.$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{l_q^w(E)}$, note que $F_{k,(x_j)_{j=1}^{\infty}}$ é fechado. Basta seguir a mesma idéia que foi usada para mostrar que $F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}}$ é fechado, na demonstração do Teorema 3.2.15.

Seja

$$F_k := \bigcap_{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{l_q^w(E)}} F_{k,(x_j)_{j=1}^{\infty}}.$$

Assim, pelo Lema 3.2.14 (na verdade, um caso particular do Lema 3.2.14),

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k.$$

Pelo Teorema de Baire, existe k_0 tal que F_{k_0} tem interior não vazio. Seja b um elemento do interior de F_{k_0}. Assim existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que

$$\left\| \eta_{p;q}(P) \left(c, (x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right\|_p \leq k_0 \tag{3.42}$$

sempre que $\|c - b\| < \varepsilon$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{l_q^w(E)}$.

Se

$$\left\| \left(v, (x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right\| < \varepsilon,$$

temos

$$\|v\| < \varepsilon \text{ e } \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} < \varepsilon < 1.$$

Logo, usando (3.42), segue que

$$\begin{aligned}
&\left\| \eta_{p;q}(P) \left[\left(b, (0)_{j=1}^{\infty} \right) + \left(v, (x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right] \right\|_p \\
&= \left\| \eta_{p;q}(P) \left[\left(b + v, (x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right] \right\|_p \\
&\leq k_0,
\end{aligned}$$

pois

$$\|(b + v) - b\| = \|v\| < \varepsilon$$

e

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} < \varepsilon < 1.$$

Portanto $\eta_{p;q}(P)$ é limitada na bola de raio ε e centro no ponto $\left(b, (0)_{j=1}^{\infty} \right) \in G$. Pelo Teorema 1.3.7, $\eta_{p;q}(P)$ é contínuo e portanto

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(b + x_j) - P(b)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left\| \eta_{p;q}(P) \left(b, (x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right\|_p \\
&\leq \|\eta_{p;q}(P)\| \left(\|b\| + \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right)^m.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\left\| \eta_{p;q}(P) \left(b, (x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(b + x_j) - P(b)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|P\|_{ev^{(2)}(p;q)} \left(\|b\| + \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right)^m.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Portanto, de (3.43) e (3.44), obtemos $\|P\|_{ev^{(2)}(p;q)} = \|\eta_{p;q}(P)\|$. A demonstração de que $\|.\|_{ev^{(2)}(p;q)}$ é uma norma é similar ao que foi feito no caso multilinear. ∎

Observação 3.2.19 *Procedendo como no caso multilinear, é possível mostrar que* $\mathcal{P}^{ev}_{as(p;q)}(E;F)$, *com a norma* $\|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}$, *é Banach.*

3.2.3 $\mathcal{L}^{ev}_{as(p;q)}$ é um ideal normado completo

Nessa seção provaremos que $\mathcal{L}^{ev}_{as(p;q)}$ com a norma $\|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}$ é um ideal normado completo. Como veremos a seguir, a norma $\|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}$ da identidade é 1. Essa é uma boa propriedade da norma $\|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}$, que não é compartilhada pela norma $\|\cdot\|_{ev^{(1)}(p;q)}$ definida em [19] (para mais detalhes a respeito da norma $\|\cdot\|_{ev^{(1)}(p;q)}$, veja [1]).

Proposição 3.2.20 *Sejam* $m \in \mathbb{N}$ *e* $id_{\mathbb{K}^m} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ *dada por* $id_{\mathbb{K}^m}(x_1, ..., x_m) = x_1 \cdots x_m$. *Então*

$$\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{ev^{(2)}(p;q)} = 1 \text{ para todo } p \geq q \geq 1.$$

Demonstração. Note que

$$\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{ev^{(2)}(p;q)} \geq \|id_{\mathbb{K}^m}\|_{as(p;q)} \geq \|id_{\mathbb{K}^m}\| = 1.$$

Assim, basta mostrar a desigualdade contrária. Vamos fazer o caso $m = 3$ (os outros casos são análogos). Dados $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{K}$ e $\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{\infty}, \left(x_j^{(3)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(\mathbb{K})$, usando a desiguladade de Minkowski, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|id_{\mathbb{K}^3}\left(a_1 + x_j^{(1)}, a_2 + x_j^{(2)}, a_3 + x_j^{(3)}\right) - id_{\mathbb{K}^3}(a_1, a_2, a_3)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_1a_2x_j^{(3)} + a_1a_3x_j^{(2)} + a_2a_3x_j^{(1)} + a_1x_j^{(2)}x_j^{(3)} + a_2x_j^{(1)}x_j^{(3)} + a_3x_j^{(1)}x_j^{(2)} + x_j^{(1)}x_j^{(2)}x_j^{(3)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{q\leq p}{\leq} |a_1a_2|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(3)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + |a_1a_3|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(2)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + |a_2a_3|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(1)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + |a_1|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(2)}x_j^{(3)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + |a_2|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(1)}x_j^{(3)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + |a_3|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(1)}x_j^{(2)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(1)}x_j^{(2)}x_j^{(3)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq |a_1a_2|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(3)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + |a_1a_3|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(2)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + |a_2a_3|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(1)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + |a_1|\left[\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(2)}\right|^q\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(3)}\right|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}} + |a_2|\left[\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(1)}\right|^q\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(3)}\right|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + |a_3|\left[\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(1)}\right|^q\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(2)}\right|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(1)}\right|^q\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(2)}\right|^q\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(3)}\right|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$= \left(|a_1| + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(1)} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \left(|a_2| + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(2)} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \left(|a_3| + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(3)} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) - |a_1 a_2 a_3|$$

$$\leq \left(|a_1| + \left\| \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \right) \left(|a_2| + \left\| \left(x_j^{(2)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \right) \left(|a_3| + \left\| \left(x_j^{(3)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \right)$$

$$= \left(|a_1| + \left\| \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right) \left(|a_2| + \left\| \left(x_j^{(2)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right) \left(|a_3| + \left\| \left(x_j^{(3)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right).$$

Logo, segue que $\|id_{\mathbb{K}^3}\|_{ev^{(2)}(p;q)} \leq 1$. ■

Proposição 3.2.21 *$(\mathcal{L}_{as(p;q)}^{ev}, \|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)})$ é um ideal completo de aplicações multilineares entre espaços de Banach.*

Demonstração. Tudo o que precisamos mostrar é que $\mathcal{L}_{as(p;q)}^{ev}$ satisfaz a propriedade de ideal e a desigualdade (iii) da Definição 1.2.22. Sejam $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, $j = 1, ..., m$, $T \in \mathcal{L}_{as(p;q)}^{ev}(E_1, ..., E_m; F)$, $t \in \mathcal{L}(F; H)$ e $(a_1, ..., a_m) \in G_1 \times \cdots \times G_m$. Então

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| t \circ T \circ (u_1, ..., u_m) \left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_m + x_j^{(m)} \right) - t \circ T \circ (u_1, ..., u_m)(a_1, ..., a_m) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|t\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T \left(u_1 \left(a_1 + x_j^{(1)} \right), ..., u_m \left(a_m + x_j^{(m)} \right) \right) - T (u_1(a_1), ..., u_m(a_m)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|t\| \|T\|_{ev^{(2)}(p;q)} \left(\|u_1(a_1)\| + \left\| \left(u_1 \left(x_j^{(1)} \right) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right) \cdots \left(\|u_m(a_m)\| + \left\| \left(u_m \left(x_j^{(m)} \right) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right)$$

$$\leq \|t\| \|T\|_{ev^{(2)}(p;q)} \|u_1\| \cdots \|u_m\| \left(\|a_1\| + \left\| \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right) \cdots \left(\|a_m\| + \left\| \left(x_j^{(m)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right).$$

Segue que $\mathcal{L}_{as(p;q)}^{ev}$ satisfaz a propriedade de ideal e que

$$\|t \circ T \circ (u_1, ..., u_m)\|_{ev^{(2)}(p;q)} \leq \|t\| \|T\|_{ev^{(2)}(p;q)} \|u_1\| \cdots \|u_m\|.$$

■

3.2.4 $\mathcal{P}_{as(p;q)}^{ev}$ é um ideal normado completo

Proposição 3.2.22 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $id_{\mathbb{K}^m} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dada por $id_{\mathbb{K}^m}(x) = x^m$. Então*

$$\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{ev^{(2)}(p;q)} = 1 \text{ para todo } p \geq q \geq 1.$$

Demonstração. Note que

$$\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{ev^{(2)}(p;q)} \geq \|id_{\mathbb{K}^m}\|_{as(p;q)} \geq \|id_{\mathbb{K}^m}\| = 1.$$

Basta mostrar que $\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{ev^{(2)}(p;q)} \leq 1$. Dados $b \in \mathbb{K}$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(\mathbb{K})$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |id_{\mathbb{K}^m}(a + x_j) - id_{\mathbb{K}^m}(a)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(a + x_j)^m - a^m|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| m a^{m-1} x_j + \left(\begin{array}{c} m \\ 2 \end{array} \right) a^{m-2} x_j^2 + \cdots + \left(\begin{array}{c} m \\ 2 \end{array} \right) a^2 x_j^{m-2} + a m x_j^{m-1} + x_j^m \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\overset{q \leq p}{\leq} m \left|a\right|^{m-1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\begin{array}{c} m \\ 2 \end{array} \right) \left|a\right|^{m-2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^{2q} \right)^{\frac{1}{q}} + \cdots$$

$$\cdots + \left|ma\right| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^{(m-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^{mq} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq m \left|a\right|^{m-1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\begin{array}{c} m \\ 2 \end{array} \right) \left|a\right|^{m-2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^{q} \right)^{\frac{2}{q}} + \cdots$$

$$\cdots + \left|ma\right| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^{q} \right)^{\frac{m-1}{q}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^{q} \right)^{\frac{m}{q}}$$

$$\leq \left(\left|a\right| + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^m = \left(\left|a\right| + \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \right)^m = \left(\left|a\right| + \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right)^m .$$

Logo, concluímos que $\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{ev^{(2)}(p;q)} \leq 1$. ∎

Proposição 3.2.23 $(\mathcal{P}_{as(p;q)}^{ev}, \|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)})$ *é um ideal completo de polinômios entre espaços de Banach.*

Demonstração. Do mesmo modo da Proposição 3.2.21, basta mostrar que $\mathcal{P}_{as(p;q)}^{ev}$ satisfaz a propriedade de ideal e a desigualdade (iii) da Definição 1.3.16. Sejam $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{P}_{as(p;q)}^{ev}({}^m E; F)$, $t \in \mathcal{L}(F; H)$ e $a \in G$. Daí

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| t \circ P \circ u (a + x_j) - t \circ P \circ u (a) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|t\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| P(u(a + x_j)) - P(u(a)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.45) \\ &\leq \|t\| \, \|P\|_{ev^{(2)}(p;q)} \left(\|u(a)\| + \left\| (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right)^m \\ &\leq \|t\| \, \|P\|_{ev^{(2)}(p;q)} \, \|u\|^m \left(\|a\| + \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right)^m . \end{aligned}$$

Segue que $\mathcal{P}_{as(p;q)}^{ev}$ satisfaz a propriedade de ideal. De (3.45) temos

$$\|t \circ P \circ (u)\|_{ev^{(2)}(p;q)} \leq \|t\| \, \|P\|_{ev^{(2)}(p;q)} \, \|u\|^m .$$

Portanto $\mathcal{P}_{as(p;q)}^{ev}$ é um ideal completo de polinômios. ∎

Referências Bibliográficas

[1] J. Barbosa, G. Botelho, D. Diniz e D. Pellegrino, Spaces of absolutely summing polynomials, Mathematica Scandinavica, **101** (2007), 219-237.

[2] G. Botelho, Tipo e cotipo: Caracterização via funções de Rademacher generalizadas e contribuições à teoria de aplicações multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach - Tese de Doutorado, UNICAMP - 1995.

[3] G. Botelho, Séries incondicionalmente convergentes: de Dirichlet a Dvoretzky-Rogers, Matemática Universitária **30** (2001), 103-112.

[4] G. Botelho, Ideals of polynomials generated by weakly compact operators, Note di Matematica, Lecce, **25** (2005), 69-102.

[5] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek e D. Pellegrino, Holomorphy types and ideals of multilinear mapping, Studia Mathematica **177** (2006), 43-65.

[6] G. Botelho e D. Pellegrino, On symmetric ideals of multilinear mappings between Banach spaces, Journal of the Australian Mathematical Society, **81** (2006), 141-148.

[7] H.-A. Braunss, Ideale Multilinearer abbildungen und räume holomorpher funktionen, Dissertação, Potsdam, 1984.

[8] H.-A. Braunss e H. Junek, Ideals of polnomials and Multilinear Mappings, livro em preparação.

[9] H.-A. Braunss e H. Junek, On types of polynomials and holomorphic functions on Banach spaces, Note di Matematica **10** (1990), 47-58.

[10] E. Çaliskan e D. Pellegrino, On multilinear extensions of absolutely summing operators, Rocky Mountain J. Math **37** (2007), 1137-1154.

[11] A. Defant e K. Floret, Tensor Norms and Operator Ideals, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1993

[12] J. Diestel, H. Jarchow e A. Pietsch, Operator Ideals, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol 1, Elsevier (2001), 437-496.

[13] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, Absolutely Summing Operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, 1995.

[14] K. Floret e D. García, On ideals of polynomials and multilinear mapping between Banach spaces, Archiv der Mathematik (Basel) **81** (2003), 300-308.

[15] A. Grothendieck, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo **8** (1956), 1-79.

[16] E. Kreysig, Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley, New York (1978).

[17] S. Kwapień, Some remarks on (p, q)-summing operators in l_p-spaces, Studia Mathematica **34** (1970), 109-11.

[18] J. Lindenstrauss e A. Pełczyński, Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications, Studia Mathematica **29** (1968), 275-326.

[19] M. C. Matos, Nonlinear absolutely summing mappings, Mathematische Nachrichten **258** (2003), 71-89.

[20] S. Mazur e W. Orlicz, Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen, Studia Mathematica **5** (1935), 50 -68.

[21] B. S. Mitiagin e A. Pełczyński, Nuclear operators and approximative dimensions. Proceedings International Congress of Mathematicians, Moscow 1966.

[22] J. Mujica, Complex Analysis in Banach Spaces, Math. Studies 120, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[23] L. Pellegrini, Um Teorema de Hahn-Banach para Polinômios Homogêneos, Dissertação de Mestrado, USP, 2001.

[24] D. Pellegrino, Aplicações entre espaços de Banach relacionadas à convergência de séries, Tese de Doutorado, Unicersidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2002.

[25] D. Pellegrino, Almost summing mappings, Archiv der Mathematik (Basel) **82** (2004), 68-80.

[26] D. Pellegrino, Cotype and nonlinear absolutely summing mappings, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy **105(A)** (2005), 75-91.

[27] A. Pietsch, Ideals of multilinear functionals, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.

[28] A. Pietsch, Operator Ideals, North-Holland Holland Math. Library, Amsterdam (1980).

[29] R. Ryan, Introduction to Tensor Products of Banach Spaces, Springer Verlag, 2002.

[30] I. Sandberg, Multilinear maps and uniform boudedness. IEEE Transactions Circuits and Systems **32** (1985) 332-336.

[31] J. S. dos Santos, Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.