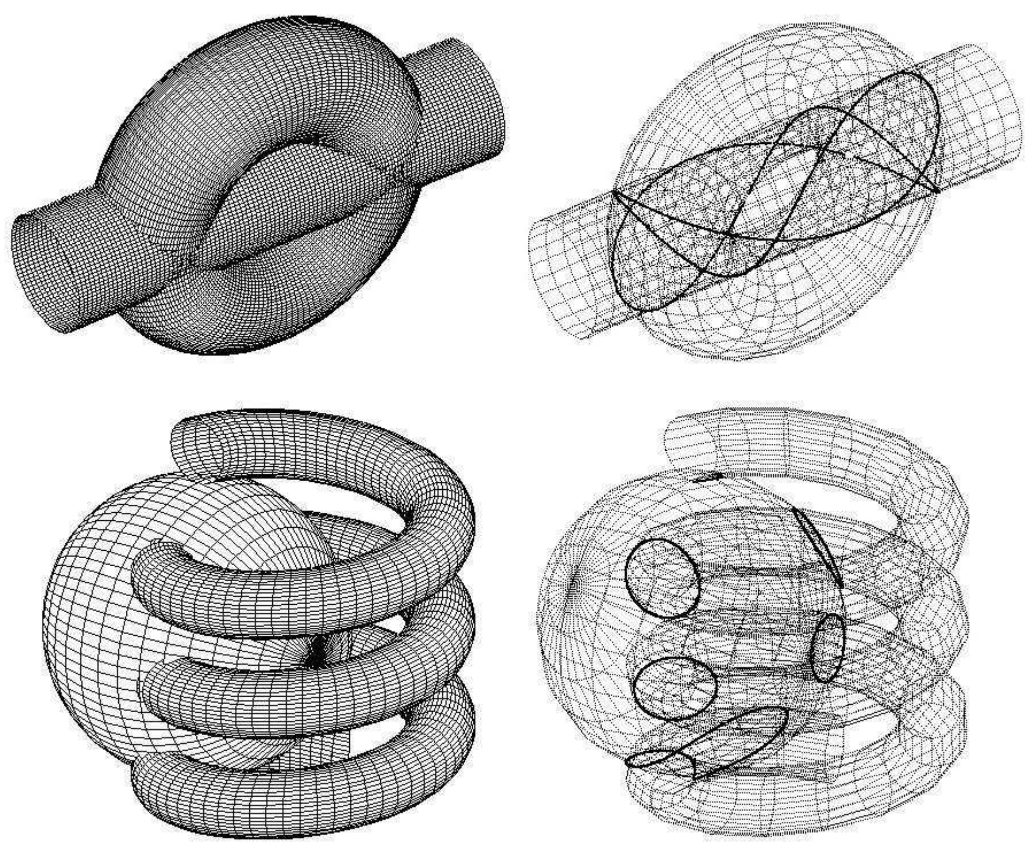
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CÁLCULO NUMÉRICO

Introdução à Matemática Computacional



Lenimar Nunes de Andrade
numerufpb@gmail.com
versão 2.0 – 28/julho/2016

Sumário

Prefácio

Este texto corresponde às notas de aula resumidas da disciplina "Cálculo Numérico" que vem sendo ministrada por mim na Universidade Federal da Paraíba desde agosto de 2002.

"Cálculo Numérico", também conhecido como "Métodos Numéricos" ou "Matemática Computacional", faz parte do currículo mínimo obrigatório das engenharias e cursos de Matemática, Física. Estatística e Computação, sendo fundamental em aplicações da Matemática. Os pré-requisitos são conhecimentos básicos de Cálculo Diferencial e Integral e noções de programação.

Este texto foi elaborado usando-se exclusivamente programas livres e gratuitos que podem ser facilmente encontrados à disposição na Internet:

- **Latex**: um programa que produz textos com fórmulas matemáticas de altíssima qualidade gráfica. Apesar de ser destinado principalmente a textos matemáticos, pode ser utilizado também em fórmulas de Química Orgânica, partituras musicais, partidas de xadrez, textos em outros idiomas como chinês, japonês, árabe, hebraico, russo, grego, entre outros. Pode ser copiado gratuitamente a partir de `www.miktex.org` . Apresentações (no estilo PowerPoint) também podem ser construídas com ele.

- **Maxima**: usado em todos os cálculos. É um programa de Computação Algébrica semelhante aos poderosos Maple ou Mathematica. Em desenvolvimento desde 1969, pode ser copiado de `maxima.sourceforge.net` e ser usado também como linguagem de programação. Todos os exemplos e exercícios foram programados nessa linguagem.

- **GeoGebra**: programa de Geometria Dinâmica que pode ser copiado de `www.geogebra.org` Todos os gráficos foram produzidos pelo Maxima ou pelo GeoGebra (= Geometria+Algebra).

As imagens com fotos ou desenhos de matemáticos famosos foram copiadas de "The Mac Tutor History of Mathematics Archive" (`www.gap-system.org/~history`) e alguns selos de "Images of Mathematicians on Postage Stamps" (`jeff560.tripod.com`)

João Pessoa, 30 de setembro de 2011

Lenimar Nunes de Andrade

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, definimos alguns conceitos que serão utilizados nos capítulos seguintes.

1.1 Erros absolutos

Definição 1.1 *Consideremos x' uma aproximação para um valor x considerado exato. O* erro absoluto *da aproximação de x por x', denotado por Δ_x é a distância entre esses valores, ou seja,*

$$\Delta_x = |x - x'|.$$

O erro relativo *dessa aproximação, denotado por δ_x, é definido por*

$$\delta_x = \frac{|x - x'|}{|x|}.$$

Exemplo 1.1 *Sejam $a' = 10$ e $b' = 1000$ aproximações de $a = 10,154$ e $b = 1000,154$, respectivamente. Então, os erros absolutos e relativos dessas aproximações são:*

- $\Delta_a = |a - a'| = |10,154 - 10| = 0,154$
- $\delta_a = \frac{|a-a'|}{|a|} = \frac{0,154}{10,154} = 0,01516 = 1,516\%$
- $\Delta_b = |b - b'| = |1000,154 - 1000| = 0,154$
- $\delta_b = \frac{|b-b'|}{|b|} = \frac{0,154}{1000,154} = 0,0001539 = 0,01539\%$

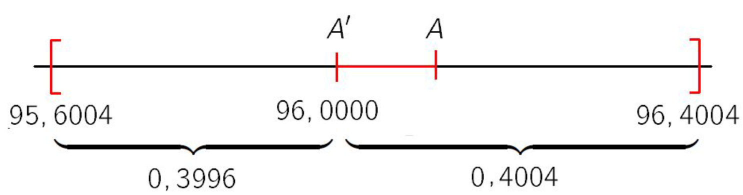
Note que apesar dos erros absolutos serem iguais, os erros relativos são bem diferentes um do outro. Os erros relativos costumam ser expressos em forma de porcentagens.

Exemplo 1.2 *Uma sala de formato retangular foi medida e foram obtidos 8 m e 12 m como sendo sua largura e seu comprimento, respectivamente. Sabendo que o erro cometido em cada uma dessas medições é no máximo 2 cm, determine o erro máximo cometido no cálculo de sua área.*

Denotemos por

- a': largura aproximada (obtida pela medição)
- b': comprimento aproximado (obtido pela medição)
- a: largura exata da sala
- b: comprimento exato da sala
- A': área aproximada da sala
- A: área exata

São dados $a' = 8m$ e $b' = 12m$. Portanto, $A' = a'b' = 8 \cdot 12 = 96m^2$. Por hipótese, $\Delta_a = |a - a'| \leq 2cm$ e $\Delta_b = |b - b'| \leq 2cm$, ou seja, $|a - 8| \leq 0,02m$ e $|b - 12| \leq 0,02m$ que equivalem a $-0,02 \leq a - 8 \leq 0,02$ e $-0,02 \leq b - 12 \leq 0,02 \Longrightarrow 8 - 0,02 \leq a \leq 8 + 0,02$ e $12 - 0,02 \leq b \leq 12 + 0,02 \Longrightarrow 7,98 \leq a \leq 8,02$ e $11,98 \leq b \leq 12,02$. Multiplicando-se essas desigualdades, obtemos: $95,6004 \leq ab \leq 96,4004$, isto é, $95,6004 \leq A \leq 96,4004$. Isso significa que a área exata é algum ponto do intervalo $[95,6004,\ 96,4004]$.



Como A' também é um ponto desse intervalo, a maior distância entre A e A' ocorre quando A for uma das extremidades do intervalo. Portanto, o erro máximo no cálculo da área é de $|96,0000 - 96,4004| = 0,4004m^2$.

Exemplo 1.3 *Um balão de formato esférico é medido e obteve-se $R' = 4$ m como sendo o seu raio. Sabendo que o erro cometido no cálculo do raio é no máximo 10 cm, calcule o erro máximo cometido no cálculo do seu volume.*

Sendo o raio aproximado do balão igual a 4 m, o volume aproximado do balão esférico é

$$V' = \frac{4}{3}\pi(R')^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,1415926 \cdot 4^3 = 268,082517\ m^3.$$

O erro máximo no cálculo do raio é no máximo 10 cm, ou seja, 0, 1 m, temos que

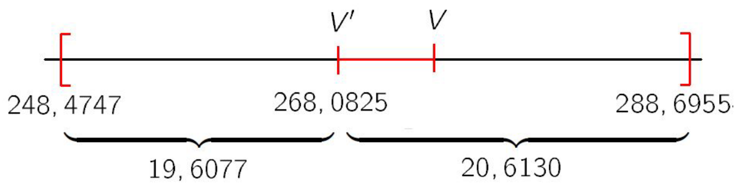
$$\Delta_R = |R - R'| = |R - 4| \leq 0,1$$

, onde R denota o valor do raio exato do balão. Logo, $-0,1 \leq R - 4 \leq 0,1$ o que é equivalente a $4 - 0,1 \leq R \leq 4 + 0,1$, isto é, $3,9 \leq R \leq 4,1$. Elevando-se ao cubo, obtemos $59,319000 \leq R^3 \leq 68,920999$ e multiplicando-se tudo por $\frac{4}{3}\pi$, obtemos

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 59,319000 \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq \frac{4}{3}\pi \cdot 68,920999,$$

que equivale a $248,474794 \leq V \leq 288,695545$.

Portanto, V é algum ponto do intervalo $[248,474794,\ 288,695545]$. Como V' é um ponto desse intervalo, então a maior distância possível entre V e V' ocorre quando V está em uma das extremidades.



Logo, o erro máximo cometido no cálculo do volume do balão é de $|268,082517 - 288,695545| = 20,613028\ m^3$.

1.2 Sequências recorrentes

Definição 1.2 *Uma sequência* (x_n) *é denominada* recorrente *(ou* recursiva*) quando o termo geral* x_n *depender dos termos anteriores, ou seja, quando*

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots)$$

para $n = 2, 3, 4, \cdots$. *No caso mais simples, temos* $x_n = f(x_{n-1})$ *(que é o mesmo que* $x_{n+1} = f(x_n)$ *).*

Exemplo 1.4 *Consideremos uma sequência* (x_n) *definida por* $x_1 = 1$ *e* $x_n = nx_{n-1}$ *para todo* $n = 2, 3, 4, \cdots$ *Como cada* x_n *depende do valor do termo anterior* x_{n-1} *temos um exemplo de sequência recorrente. Além disso temos que:*

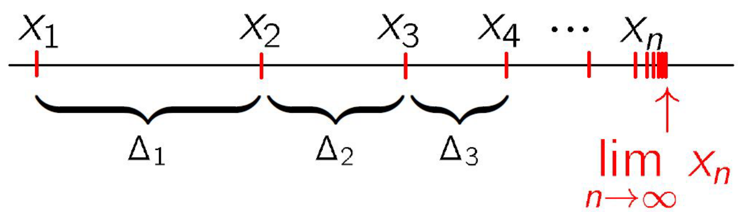
- $x_2 = 2x_1 = 2 \cdot 1 = 2$
- $x_3 = 3x_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $x_4 = 4x_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $x_5 = 5x_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- *etc.*

Note que, neste caso, a sequência (x_n) *coincide com a sequência dos fatoriais de* n.

1.2.1 Critério para determinação do limite de uma sequência convergente

É muito comum em problemas numéricos termos uma sequência convergente (x_n) e determinarmos o limite de (x_n) quando n tende a infinito. Nesses casos, usaremos o seguinte critério para determinar o limite aproximado da sequência:

- Definimos um valor positivo próximo de zero denotado por ε ou ϵ (letra grega épsilon). Por exemplo, podemos considerar algo como $\varepsilon = 0,0001 = 10^{-4}$ ou $\varepsilon = 0,0000001 = 10^{-7}$, etc.
- Calculamos os termos da sequência $x_1, x_2, x_3, \cdots$ e as distâncias entre termos consecutivos $\Delta_n = |x_{n+1} - x_n|$ para $n = 1, 2, 3, \cdots$
- Quando $\Delta_n < \varepsilon$ encerramos e dizemos que o último x_n calculado é o limite aproximado da sequência.



Exemplo 1.5 *Sendo a um número real positivo, sabe-se que a sequência recorrente (x_n) tal que $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$ converge para $\sqrt{a}$. Usando essa sequência recorrente, calcule $\sqrt{2}$ com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-5}$.*

Igualamos $\sqrt{a}$ com $\sqrt{2}$ e obtemos que $a = 2$. A partir daí, utilizamos a fórmula para x_{n+1} com $n = 1, 2, 3, \cdots$ e calculamos as diferenças $\Delta_n = |x_{n+1} - x_n|$:

- $n = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1}) = 1,5$ e $\Delta_1 = |x_2 - x_1| = 0,5$
- $n = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) = \frac{1}{2}(1,5 + \frac{2}{1,5}) = 1,4166667$ e $\Delta_2 = |x_3 - x_2| = 0,08333333$
- $n = 3 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{a}{x_3}\right) = \frac{1}{2}(1,4166667 + \frac{2}{1,4166667}) = 1,41421569$ e $\Delta_3 = |x_4 - x_3| = 0,00245098$
- $n = 4 \Rightarrow x_5 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{a}{x_4}\right) = \frac{1}{2}(1,41421569 + \frac{2}{1,41421569}) = \boxed{1,41421356}$ e $\Delta_4 = |x_5 - x_4| = 2,1 \times 10^{-6} < \varepsilon$.

Portanto, obtivemos que $\sqrt{2} \approx 1,41421356$.

1.3 Cálculo de valores de funções

O cálculo de valores de funções em pontos específicos é uma atividade essencial para qualquer área da Matemática Aplicada e para os métodos numéricos em geral. Pode ser realizado de várias formas:

- Séries de potências

- Frações contínuas
- Sequências recorrentes

Vamos utilizar apenas séries de potências por ser um método bem conhecido, simples e eficiente.

1.3.1 Função logarítmica

Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$. Um resultado bem conhecido há vários séculos é a seguinte soma de uma série geométrica:

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

Note que temos aqui uma série geométrica (P.G.) com primeiro termo igual a $a_1 = 1$ e razão $q = x^2$ logo, ela converge para $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-x^2}$.

Podemos efetuar vária operações com uma série de potências. Entre as operações permitidas está o cálculo da integral $\displaystyle\int_0^x a_n\, dx$ de cada termo da série. Usando que $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$, temos que

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1+x} dx + \int \frac{1}{1-x} dx\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Calculando a integral de cada termo da série geométrica anterior, obtemos:

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \cdots = \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

desde que $|x| < 1$.

A função $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ é conhecida pelo nome de *arco-tangente hiperbólica* de x e é denotada por $\text{arctgh}(x)$ ou $\text{arctanh}(x)$ ou $\text{atanh}(x)$ ou $\tanh^{-1}(x)$:

$$\text{arctgh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Sendo assim, a série anterior também pode ser escrita na forma:

$$\text{arctgh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \cdots$$

Utilizando uma quantidade finita de termos dessa série, podemos obter aproximações para $\text{arctgh}(x)$. Por exemplo, usando-se apenas 5 termos da série, obtemos:

$$\text{arctgh}(x) \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}.$$

As funções hiperbólicas possuem inúmeras propriedades. Entre elas, vamos citar aqui apenas uma bem particular:

$$\ln 2 = 2\,\text{arctgh}\,\frac{1}{5} + 2\,\text{arctgh}\,\frac{1}{7}$$

Essa fórmula foi utilizada por Euler em 1748 para calcular $\ln 2$ com 25 casas decimais. Sua demonstração é imediata, basta usar a definição da função arco-tangente hiperbólica: $2\,\text{arctgh}\,\frac{1}{5} + 2\,\text{arctgh}\,\frac{1}{7} = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}\right)\right] = \ln(6/4) + \ln(8/6) = \ln(\frac{6}{4}\cdot\frac{8}{6}) = \ln 2$.

Usando a fórmula anterior, podemos calcular $\ln 2$ desde que saibamos como calcular o arco-tangente hiperbólico de $1/5$ e de $1/7$. Para efetuarmos esse tipo de cálculo, basta usar a fórmula de aproximação do $\text{arctgh}(x)$ anterior:

- $\text{arctgh}\,\frac{1}{5} \approx (\frac{1}{5}) + \frac{(\frac{1}{5})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{5})^5}{5} + \frac{(\frac{1}{5})^7}{7} + \frac{(\frac{1}{5})^9}{9} = 0,20273255$
- $\text{arctgh}\,\frac{1}{7} \approx (\frac{1}{7}) + \frac{(\frac{1}{7})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{7})^5}{5} + \frac{(\frac{1}{7})^7}{7} + \frac{(\frac{1}{7})^9}{9} = 0,14384103$

e, daí, obtemos $\ln 2 \approx 2 \cdot (0,20273255 + 0,14384103) = \mathbf{0,6931471}6$, que é uma aproximação muito boa para $\ln 2$.

1.3.2 Funções trigonométricas

Os valores das funções trigonométricas podem ser calculados de várias maneiras, inclusive através de séries de potências tais como:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

Em algumas séries, pode ser útil o seguinte teorema (cuja demonstração pode ser encontrada em [1], [2] ou [3]).

Teorema 1.3.1 *Consideremos a série alternada*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \ = \ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots$$

onde $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ *e a sequência* $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ *é decrescente. Sendo* n *um inteiro positivo e* S_n *a soma dos* n *primeiros termos da série, então o erro cometido ao se aproximar* S *por* S_n *é menor ou igual a* $|a_{n+1}|$*, ou seja, o erro da aproximação é menor ou igual ao módulo do primeiro termo desprezado da série.*

Exemplo 1.6 *Calcular* $\cos 7^\circ$ *usando apenas os 4 primeiros termos do desenvolvimento em série da função cosseno e obter uma estimativa para o erro cometido.*

Solução: Transformando 7° em radianos, obtemos:

$$7^\circ = 7 \times \frac{\pi}{180} = 7 \times \frac{3,1415926535}{180} = 0,12217305 \text{ rad } = \alpha.$$

Como $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!}$ temos que

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{0,12217305^2}{2} + \frac{0,12217305^4}{24} - \frac{0,12217305^6}{720},$$

ou seja, $\cos 7° \approx 0,99254615$.

Uma estimativa para o erro no cálculo é dada pelo módulo do primeiro termo desprezado da série do $cos(\alpha)$: $\varepsilon \leq \frac{\alpha^8}{8!} = \frac{0,12217305^8}{40320} \approx 1,23 \times 10^{-12}$.

1.4 Cálculo do valor de π

Desde a antiguidade que o cálculo do valor de π tem despertado o interesse de diferentes povos. Aproximações como 3,12 ou 3,16 já eram conhecidas por babilônios ou egípcios há vários milênios.

Calculado na antiguidade por métodos puramente geométricos (inscrição e circunscrição de polígonos regulares em uma circunferência), a partir do século XVIII passou a ser calculado por métodos analíticos, usando-se apenas operações algébricas como adição, multiplicação e divisão de números reais. Esses métodos analíticos costumam produzir resultados com grande precisão, ou seja, com muitas casas decimais corretas. Entre os vários métodos analíticos conhecidos, destaca-se uma família de fórmulas que expressam π como uma combinação de vários arco-tangentes. No início do século XVIII, uma dessas fórmulas foi utilizada para calcular pela primeira vez π com 100 casas decimais corretas.

A partir do século XX, com a utilização de computadores cada vez mais potentes e rápidos, o cálculo de π passou a ser efetuado com uma quantidade cada vez mais espantosa de casas decimais. Recentemente, em outubro de 2011, um recorde foi batido com a ajuda de supercomputadores.

1.4.1 Fórmulas envolvendo π e a função arco-tangente

Vamos iniciar com dois exercícios resolvidos sobre trigonometria.

Exercício 1.1 *Determine o valor de* $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$

Solução: Sejam $a = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ e $b = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ o que implica em $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} b = \frac{1}{3}$. Devemos calcular o valor de $y = a + b$. Isso ficará fácil se soubermos quanto é $\operatorname{tg}(a + b)$.

Temos que $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5/6}{5/6} = 1$. Portanto, $\operatorname{tg} y = 1$ o que significa que $y = \frac{\pi}{4}$. Portanto,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

Essa fórmula escreve uma fração que envolve π como combinação linear de arcos-tangentes de determinados valores. Há um grande número de fórmulas como essa, outra delas aparece no próximo exercício.

Exercício 1.2 *Seja β a medida de um ângulo tal que* $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{5}$. *Calcule* $\operatorname{tg}(2\beta)$, $\operatorname{tg}(4\beta)$ *e* $\operatorname{tg}(4\beta - \frac{\pi}{4})$.

Solução: Fazendo $a = b = \beta$ na fórmula de $\operatorname{tg}(a + b)$, obtemos:

$$\operatorname{tg}(2\beta) = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - (\frac{1}{5})^2} = \frac{5}{12}.$$

Fazendo $a = b = 2\beta$ na fórmula de $\operatorname{tg}(a + b)$, obtemos:

$$\operatorname{tg}(4\beta) = \frac{2\operatorname{tg}(2\beta)}{1 - \operatorname{tg}^2(2\beta)} = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - (\frac{5}{12})^2} = \frac{120}{119}$$

que é próximo de 1 o que implica que 4β é próximo de $\frac{\pi}{4}$.

$$\operatorname{tg}(4\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg}(4\beta) + \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})}{1 - \operatorname{tg}(4\beta)\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{120}{119} + (-1)}{1 - (\frac{120}{119}) \cdot (-1)} = \frac{1}{239}$$

que é um valor próximo de zero, o que era de se esperar pois $(4\beta - \frac{\pi}{4})$ é próximo de zero (pelo item anterior deste mesmo exercício).

Portanto, $\operatorname{tg}(4\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239}$ que é equivalente a $4\beta - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$, ou seja, $4\beta - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$. Como $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$, obtemos finalmente que

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.}$$

Essa fórmula é conhecida pelo nome de *fórmula de Machin* e foi utilizada em 1706 para calcular π com 100 casas decimais.

1.4.2 Série de potências da função arco-tangente

Se $|x| < 1$, então é conhecida há vários séculos a soma da seguinte série geométrica:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots = \frac{1}{1 + x^2}$$

Entre as várias operações permitidas com essa série, podemos calcular integral (no intervalo $[0, x]$) de cada termo da série:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots = \operatorname{arctg} x$$

Usando uma quantidade finita de termos dessa série anterior, podemos obter aproximações para o $\operatorname{arctg}(x)$, se $|x| < 1$. Por exemplo, se usarmos apenas os 6 primeiros termos da série, obtemos a seguinte aproximação:

$$\operatorname{arctg}(x) \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}.$$

Fazendo $x = \frac{1}{5}$, e depois $x = \frac{1}{239}$ nessa fórmula, obtemos:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{5} \approx \frac{1}{5} - \frac{(\frac{1}{5})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{5})^5}{5} - \frac{(\frac{1}{5})^7}{7} + \frac{(\frac{1}{5})^9}{9} - \frac{(\frac{1}{5})^{11}}{11} = 0,197395559789$$

e

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{239} \approx \frac{1}{239} - \frac{(\frac{1}{239})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{239})^5}{5} - \frac{(\frac{1}{239})^7}{7} + \frac{(\frac{1}{239})^9}{9} - \frac{(\frac{1}{239})^{11}}{11} = 0,004184076002$$

Substituindo na fórmula para $\pi/4$ anterior, obtemos:

$$\frac{\pi}{4} \approx 4 \times 0,197395559789 - 0,004184076002 = 0,785398163154,$$

e, finalmente, $\pi \approx 4 \times 0,7853981706 = \mathbf{3,14159265}2615$.

- Como a série do $\operatorname{arctg} x$ é alternada, uma estimativa para o erro da aproximação no cálculo de $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ é de $\frac{1}{13}(\frac{1}{5})^{13} \approx 6,3 \cdot 10^{-11}$ e o erro no cálculo de $\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ é de $\frac{1}{13}(\frac{1}{239})^{13} \approx 9,2 \cdot 10^{-33}$.

- Portanto, ao aproximarmos π por $16\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$, uma estimativa para o erro absoluto dessa aproximação é $16 \cdot (6,3 \cdot 10^{-11}) + 4 \cdot (9,2 \cdot 10^{-33}) \approx 10^{-9}$ o que significa que o valor de π calculado acima tem 8 casas decimais consideradas corretas.

- Usando esse mesmo tipo de argumento, se tivéssemos utilizado 71 termos do desenvolvimento em série do $\operatorname{arctg} x$, então uma estimativa para o erro absoluto da aproximação seria de $16 \cdot (\frac{1}{141}(\frac{1}{5})^{141}) + 4 \cdot (\frac{1}{141}(\frac{1}{239})^{141}) \approx 1,24 \cdot 10^{-101}$ o que significa que o valor de π assim obtido teria 100 casas decimais corretas.

1.4.3 Cálculo do valor de π ao longo dos séculos

A história da constante π se confunde com a própria história da Matemática. Ao longo dos séculos, muitos matemáticos importantes em algum momento de suas vidas se dedicaram ao cálculo dessa constante. A seguir, algumas tabelas que mostram a evolução desse cálculo com o passar do tempo.

O cálculo de π antes do uso de computadores

NOME	ANO	DÍGITOS
Egípcios	2000 A.C.	1
Babilônios	2000 A.C.	1
Hebreus	550 A.C.	1
Arquimedes	250 A. C.	3
Ptolomeu	150	3
Liu Hui	263	5
Tsu Chung Chi	480	7
Al-Kashi	1429	14
Romanus	1593	15
Van Ceulen	1615	35
Sharp & Halley	1699	71
Machin	1706	100
Strassnitzky & Dase	1844	200
Rutherford	1853	440
Shanks	1874	527

O cálculo de π com a utilização de computadores

NOME	ANO	DÍGITOS
Reitwiesner & outros (ENIAC)	1949	2.037
Genuys	1958	10.000
Shanks & Wrench	1961	100.265
Guilloud & Bouyer	1973	1.001.250
Miyoshi–Kanada	1981	2.000.036
Kanada–Yoshino–Tamura	1982	16.777.206
Gosper	1985	17.526.200
Bailey	Jan/1986	29.360.111
Kanada–Tamura	Out/1986	67.108.839
Kanada–Tamura	Jan/1988	201.326.551
Chudnovskys	Mai/1989	480.000.000
Kanada–Tamura	Jul/1989	536.870.898
Kanada–Tamura	Nov/1989	1.073.741.799
Chudnovskys	Ago/1991	2.260.000.000

NOME	ANO	DÍGITOS
Chudnovskys	Mai/1994	4.044.000.000
Kanada–Takahashi	Out/1995	6.442.450.938
Kanada–Takahashi	Jul/1997	51.539.600.000
Kanada–Takahashi	Set/1999	206.158.430.000
Kanada–Ushiro–Kuroda	Dez/2002	1.241.100.000.000
Takahashi	2009	2.576.980.370.000
Fabrice Bellard	2010	2.699.999.990.000
Kondo–Yee	Ago/2010	5.000.000.000.000
Kondo–Yee	Out/2011	10.000.000.000.000
Houkouonchi–Yee	Out/2014	13.300.000.000.000

1.4.4 Curiosidade: frases que fornecem o valor de π

Antigamente, antes da década de 70, era muito comum a invenção de frases que ajudavam na memorização de diversas constantes ou fórmulas. Existem frases que fornecem o valor de π em uma grande variedade de idiomas. Basta lembrar da frase, contar as letras de cada palavra, que teremos o valor de π com um considerável número de casas decimais.

3,1415926

$$\text{“}\underbrace{\text{Com}}_{3,}\ \underbrace{\text{o}}_{1}\ \underbrace{\text{júri}}_{4}\ \underbrace{\text{a}}_{1}\ \underbrace{\text{votar,}}_{5}\ \underbrace{\text{‘\textit{Disparada}’}}_{9}\ \underbrace{\text{já}}_{2}\ \underbrace{\text{ganhou.}}_{6}\text{”}$$

“Disparada” é uma canção premiada no II Festival da Música Popular Brasileira da TV Record, em 1966, autoria de Geraldo Vandré e Theo de Barros.

3,1415926535

Aqui, é o próprio π dizendo para o menino que não gosta de estudar e, consequentemente, tem medo de π por causa das casas decimais:

“ — Sou o medo e pavor constante do menino vadio, bem vadio.”

Note que essa frase fornece π com 10 casas decimais: $3,1415926535$.

3,14159265358

Uma frase com tema religioso que fornece o valor de π com 11 casas decimais:

“Ama a Deus e segue fielmente as lições dadas por Jesus Nazareno.”

3,14159265358979323846264...

E, finalmente, uma das muitas frases em inglês que fornece um grande número de decimais:

"How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard ..."

1.5 Exercícios Propostos

(P01) Utilizando uma calculadora, calcule os seguintes valores numéricos:

- $a = e^{-\frac{\pi}{2}} (= i^i)$ Resp.: $a = 0,207879$
- $b = \text{arctg}(3/4) + \text{arctg}(4/3)$ Resp.: $b = \pi/2 = 1,570796$
- $c = \left(1 + \frac{1}{500}\right)^{500}$ Resp.: $c = 2,715568$
- $d = \ln(\cos 1)$ Resp.: $d = -0,615626$
- $e = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$ Resp.: $e = 2,000000$
- $f = \dfrac{17^2 + (-19)^2 + 7^3}{4^5 + (-5)^5}$ Resp.: $f = -0,47263208$
- $g = 2\,\text{arctgh}(\frac{58}{67}) - 4\,\text{arctgh}(\frac{1}{4})$ Resp.: $g = 1,609437912 = \ln(5)$
- $h = 3,27^2 - 4,10^2 + (-5,17)^2 - (-2,38)^2$ Resp.: $14,9474$

(P02) Sejam a', b' e c' os inteiros mais próximos de $a = \ln(\pi + 2)$, $b = \left(\frac{11e}{30} + \frac{5}{7}\right)^5$ e $c = 7\,\text{sen}(\sqrt{11})$. Calcule os erros absolutos Δ_a, Δ_b e Δ_c e os erros relativos δ_a, δ_b e δ_c cometidos quando substituímos a', b', c' por a, b, c. Resp.: $\Delta_a = 0,3626$, $\Delta_b = 0,3365$, $\Delta_c = 0,2189$, $\delta_a = 22,14\%$, $\delta_b = 2,29\%$, $\delta_c = 17,96\%$

(P03) Um terreno de formato retangular foi medido com erros que não superaram 15 cm em cada medição. Sabendo que o comprimento e a largura encontrados foram 30 m e 14 m, respectivamente, obtenha uma estimativa para o erro no cálculo da área desse terreno. Resp.: $\varepsilon \leq 6,6225\ m^2$.

(P04) A aresta de uma caixa em forma de cubo é medida, e, devido à falta de precisão do instrumento utilizado, obteve-se uma aresta de 15 cm com erro no máximo igual a 2 cm. Determine o volume aproximado da caixa, um intervalo $[a, b]$ que contenha o valor do volume exato e uma estimativa para o erro do cálculo do volume. Resp.: $[a, b] = [2197,\ 4913]$, $\varepsilon \leq 1538\ cm^3$.

(P05) Considere a' e b' como sendo aproximações para a e b com erros absolutos inferiores a ε_1 e ε_2, respectivamente. Mostre que ao aproximarmos $a - b$ por $a' - b'$ o erro cometido na aproximação é menor do que $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ e que, em geral, se k_1 e k_2 forem constantes, o erro absoluto da aproximação de $k_1 a + k_2 b$ por $k_1 a' + k_2 b'$ é menor do que $|k_1|\varepsilon_1 + |k_2|\varepsilon_2$.

(P06) Seja $\theta = 23°$ a medida em graus de um ângulo. Utilizando apenas os quatro primeiros termos da série de Taylor da função cosseno, calcule uma aproximação para $\cos\theta$ e uma estimativa para o erro cometido.
Resp.: $\cos 23° \approx 0,920504867$, $\varepsilon \leq 1,67 \cdot 10^{-8}$

(P07) Usando apenas os 9 primeiros termos da série

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

obtenha uma aproximação para o valor de e. (Use 5 casas decimais) Resp.: $e \approx 2,71828$

(P08) A função $f(x) = \ln(x+1)$ com $|x| < 1$ possui o seguinte desenvolvimento em série de potências de x:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$$

Utilizando os 6 primeiros termos dessa série, calcule $\ln(1,20)$ e uma estimativa para o erro da aproximação. Resp.: $\ln(1,20) \approx 0,18232000$, $\varepsilon \leq 1,8 \cdot 10^{-6}$

(P09) Consideremos ℓ_n como sendo o lado do polígono de n lados inscrito em uma circunferência de raio 1. Usando o Teorema de Pitágoras obtemos $\ell_4 = \sqrt{2}$ e $\ell_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\ell_n)^2}}$. Baseando-se nestas informações, calcule o lado e o perímetro de um polígono com 128 lados inscrito em uma circunferência de raio 1 (que é uma aproximação para 2π).

Resp.: $\ell_{128} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}} = 0,049082$, $P = 6,282554$.

(P10) A fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 44 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 7 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} - 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{682} + 24 \operatorname{arctg} \frac{1}{12943}$$

foi utilizada em dezembro de 2002 no Japão para calcular π com mais de um trilhão e duzentos bilhões de casas decimais.

a) Utilizando essa fórmula e os dois primeiros termos do desenvolvimento em série de potências de $\operatorname{arctg} x$, calcule π com erro no máximo igual a $0,0000001$.

b) Obtenha uma estimativa do erro absoluto da aproximação de π ao utilizarmos a fórmula anterior e 30 termos do desenvolvimento do $\operatorname{arctg} x$.
Resp.: a) $\pi \approx 3,1415926595$; b) $\varepsilon \leq 2,2 \cdot 10^{-107}$.

(P11) Sabendo que $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2x} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4x^3+3x}$, $\forall x \neq 0$, usando a fórmula de Machin, mostre que

$$\frac{\pi}{4} = 8\operatorname{arctg}\frac{1}{10} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{515} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

(P12) a) Mostre que

$$\ln 2 = 10\operatorname{arctgh}\frac{1}{17} + 4\operatorname{arctgh}\frac{13}{499}$$

b) Usando a fórmula do item (a) e os três primeiros termos do desenvolvimento em série da função arco-tangente hiperbólica, calcule uma aproximação para $\ln 2$ (*utilize 8 casas decimais nos cálculos*). Resp.: $\ln 2 \approx 0,693147177$.

(P13) Sendo p, q, a, b, c, d inteiros positivos, sabe-se que

$$\ln p = \frac{2a}{ac-bd}\operatorname{arctgh}\left(\frac{p^c-q^b}{p^c+q^b}\right) + \frac{2b}{ac-bd}\operatorname{arctgh}\left(\frac{q^a-p^d}{q^a+p^d}\right).$$

Fazendo $p = 3, q = 2, a = 3, b = 8, c = 5, d = 2$ obtenha uma fórmula para $\ln 3$ escrito como combinação linear de arco-tangentes hiperbólicas e usando os quatro primeiros termos do desenvolvimento em série de potências de $\operatorname{arctgh}(x)$, calcule uma aproximação para $\ln 3$.
Resp.: $\ln 3 = 16\operatorname{arctgh}\frac{1}{17} + 6\operatorname{arctgh}\frac{13}{499} \approx 1,098612277$.

Capítulo 2

Resolução de Equações

2.1 Introdução

O cálculo de raízes de uma equação é uma atividade importante porque muitos problemas de natureza prática dependem dele. Por isso, é interessante ter técnicas que permitam determinar raízes para os mais diversos tipos de equações.

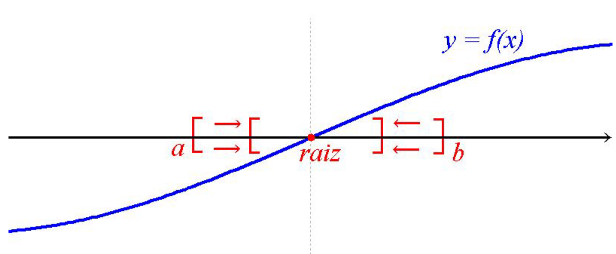
De um modo geral, as equações podem ser classificadas em algébricas ou transcendentes. As equações algébricas são aquelas que são polinomiais ou as que podem ser transformadas em polinomiais. Por exemplo $x^3 - 4x^2 + 5x - 10 = 0$ e $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x+5} = 7$ são exemplos de equações algébricas. As equações que não são algébricas são chamadas transcendentes, como por exemplo, $x^2 - \cos(x) = e^{x+1}$ e $2^x - 3x - \ln(x+3) = 5$.

Existem fórmulas de resolução apenas para equações mais simples, de tipos bem particulares (como as equações de segundo grau, por exemplo). Portanto, resolver equações por fórmulas não é um método eficiente de resolução porque não abrange uma grande variedade de tipos de equações.

Neste capítulo, usaremos algoritmos para determinar uma raiz de uma equação que consistem em duas etapas:

- Isolamento da raiz
- Refinamento

O isolamento da raiz consiste em se determinar um intervalo $[a,\ b]$ que contenha uma raiz da equação no seu interior.



O refinamento consiste em redefinir o intervalo $[a,\ b]$ de modo a obtermos um intervalo de menor comprimento, mas que contenha ainda uma raiz da equação no seu interior.

Na etapa do isolamento da raiz, é bastante útil a utilização do seguinte teorema que usaremos sem a devida demonstração:

Teorema 2.1.1 *Se $f(x)$ for contínua em um intervalo $[a, b]$ de tal forma que $f(a)f(b) < 0$ (ou seja, que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários), então a equação $f(x) = 0$ possui pelo menos uma raiz no interior desse intervalo.*

2.2 Método da Bisseção

Dados $\varepsilon > 0$ e $f(x)$ contínua em $[a, b]$ com $f(a)f(b) < 0$, o método da bisseção para a determinação de uma raiz da equação $f(x) = 0$ consiste em ir dividindo o intervalo ao meio até que ele fique suficientemente pequeno; daí, escolhemos o ponto médio do intervalo como sendo uma raiz aproximada. Consiste em se executar os seguintes passos:

(1) Calculamos $m = \frac{a+b}{2}$ o ponto médio do intervalo; se $f(m) = 0$ então m é uma raiz da equação e encerramos;

(2) Se $\Delta = |b - a| < \varepsilon$, então dizemos que m é uma raiz aproximada da equação e encerramos;

(3) Se os sinais de $f(a)$ e $f(m)$ coincidirem, então redefinimos $a = m$;

(4) Se os sinais de $f(b)$ e $f(m)$ coincidirem, então redefinimos $b = m$;

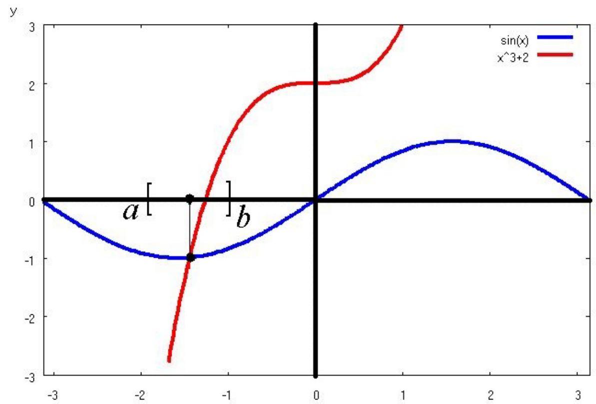
(5) Retornamos ao item (1).

Esse método faz uma *pesquisa binária* no intervalo $[a, b]$ em busca da raiz da equação. Tem alguma semelhança com o que fazemos quando procuramos uma palavra em um dicionário: primeiro abrimos o livro ao meio; depois, desprezamos uma das metades e abrimos ao meio de novo. E assim procedemos até encontrarmos a palavra.

Exemplo 2.1 *Determinar uma raiz da equação $x^3 - \operatorname{sen} x + 2 = 0$ com um erro inferior a $\varepsilon = 0,01$.*

Seja $f(x) = x^3 - \operatorname{sen} x + 2$. Inicialmente, determinamos um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários. Tentando várias possibilidades para a e b, obtemos $f(-2) = -5,0907 < 0$ e $f(-1) = 1,8414 > 0$. Logo, podemos escolher $[a, b] = [-2,\ -1]$.

Como a equação dada é equivalente a $x^3 + 2 = \operatorname{sen} x$, uma outra maneira de definir o intervalo $[a, b]$ é através da observação dos gráficos das funções x^3+2 e $\operatorname{sen} x$. Neste caso, a raiz da equação corresponde à abscissa x do ponto de encontro dos gráficos.



a	b	$m = \frac{a+b}{2}$	sinal de $f(m)$	$\Delta = \lvert b-a \rvert$
$-2,0000$	$-1,0000$	$-1,5000$	$-$	$1,0000$
$-1,5000$	$-1,0000$	$-1,2500$	$+$	$0,5000$
$-1,5000$	$-1,2500$	$-1,3750$	$+$	$0,2500$
$-1,5000$	$-1,3750$	$-1,4375$	$+$	$0,1250$
$-1,5000$	$-1,4375$	$-1,4687$	$-$	$0,0625$
$-1,4687$	$-1,4375$	$-1,4531$	$-$	$0,0312$
$-1,4531$	$-1,4375$	$-1,4453$	$-$	$0,0156$
$-1,4453$	$-1,4375$	$-1,4414$	$-$	$0,0078$

Paramos a construção da tabela assim que obtemos $\Delta = 0,0078 < \varepsilon$. Logo, a raiz aproximada encontrada foi o último m calculado que é $-1,4414$.

2.3 Método das Cordas

Suponhamos $f(x)$ duas vezes derivável em um intervalo $[a,b]$ de tal forma que $f(a)f(b) < 0$ e $f''(x)$ não mudando de sinal nesse intervalo.

O *método das cordas* para a determinação de uma raiz da equação $f(x) = 0$ consiste em aproximar a raiz por x_1, a interseção do eixo $0x$ com o segmento de reta (corda) cujas extremidades são os pontos $A = (a,\ f(a))$ e $B = (b,\ f(b))$. A partir daí, redefinimos a ou b como sendo igual a x_1, repetimos a construção e obtemos um novo ponto x_2, e depois, x_3, x_4 etc. Quando a sequência (x_n) converge, ela converge para uma raiz da equação $f(x) = 0$.

Consideraremos dois casos semelhantes: um caso 1 em que $f(a)f''(a) < 0$ e um caso 2 em que $f(a)f''(a) > 0$. No caso 1, definimos $x_0 = a$ e, no caso 2, $x_0 = b$.

A equação da reta que passa por A e B é $y - f(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Fazendo $y = 0$ e $x = x_1$ e substituindo a por x_0 (no caso 1), obtemos $x_1 = x_0 + \dfrac{f(x_0)}{f(b)-f(x_0)}(x_0 - b)$.

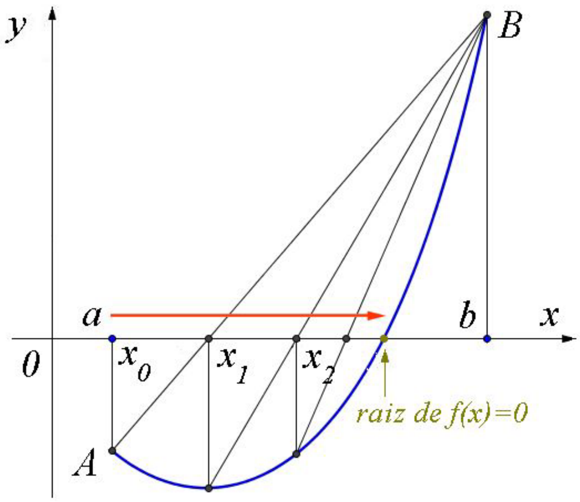


Figura 2.1: Caso 1: $f(a)f''(a) < 0$

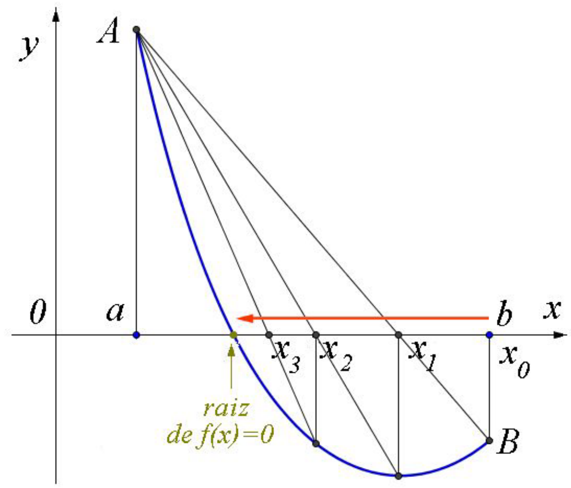


Figura 2.2: Caso 2: $f(a)f''(a) > 0$

De modo análogo, obtemos $x_2 = x_1 + \dfrac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(x_1 - b)$ e, de modo geral, no caso 1, obtemos

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(x_n - b),}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

No caso 2, $x_0 = b$ e calculando a interseção da reta que passa por A e B com o eixo $0x$, obtemos $x_1 = x_0 + \dfrac{f(x_0)}{f(a) - f(x_0)}(x_0 - a)$ e, de um modo geral,

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f(a) - f(x_n)}(x_n - a),}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Exemplo 2.2 *Determinar uma raiz da equação* $\operatorname{arctg} x = e^{-x}$ *com um erro inferior a* $\varepsilon = 0,0001 = 10^{-4}$.

Seja $f(x) = \operatorname{arctg} x - e^{-x}$. Por tentativas, escolhendo $a = 0$ e $b = 1$, obtemos: $f(a)f(b) = f(0)f(1) = (0-1)(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{e}) = -0,417518 < 0$. Logo, a equação possui raiz no interior do intervalo $[a, b] = [0, 1]$.

Derivando $f(x)$, obtemos $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + e^{-x}$ e $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} - e^{-x}$. Como $f(a)f''(a) = f(0)f''(0) = 1 > 0$ temos uma situação do caso 2 citado anteriormente. Portanto, $x_0 = b = 1$ e $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f(a)-f(x_n)}(x_n - a)$ para $n = 0, 1, 2, \cdots$.

n	x_n	$\Delta = \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	$1,000000$	$---$
1	$0,705458$	$0,294541$
2	$0,629593$	$0,075864$
3	$0,611797$	$0,017795$
4	$0,607741$	$0,004056$
5	$0,606825$	$0,000918$
6	$0,606615$	$0,000207$
7	$0,606569$	$0,000046 < \varepsilon$

Portanto, a raiz aproximada é $0,606569$.

2.4 Método da Iteração Linear

Consideremos uma equação da forma $f(x) = x$ onde $f(x)$ é contínua em um intervalo $[a, b]$ no qual a equação possui uma raiz. Dada uma aproximação inicial x_1 para uma raiz da equação, construímos a sequência recorrente definida por $x_n = f(x_{n-1})$ para $n = 2, 3, 4, \cdots$:

$$(x_1,\ f(x_1),\ f(f(x_1)),\ f(f(f(x_1))),\ f(f(f(f(x_1)))),\ \cdots)$$

Se (x_n) converjir para L, ou seja, se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, então $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = L$ o que implica $f(\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}) = L$, isto é, $f(L) = L$. Logo, L é uma raiz da equação $f(x) = x$.

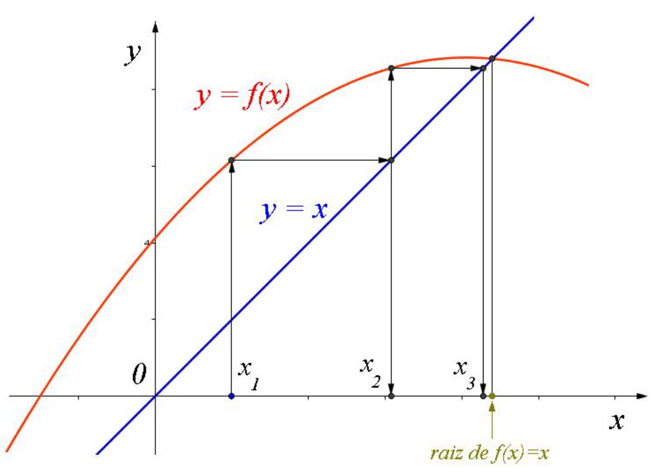


Figura 2.3: Caso 1: (x_n) converge

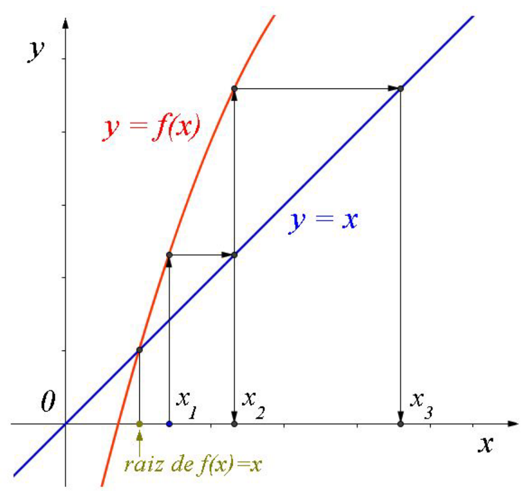


Figura 2.4: Caso 2: (x_n) não converge

Temos dois casos a considerar:

- Caso 1: $|f'(x_1)| < 1$. Neste caso, a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$

tem inclinação menor do que a da reta $y = x$. Neste caso, a sequência (x_n) **converge** para uma raiz da equação $f(x) = x$. Veja Figura 2.3.

- Caso 2: $|f'(x_1)| > 1$. Neste caso, a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ tem inclinação maior do que a da reta $y = x$. Neste caso, a sequência (x_n) **não converge** para uma raiz da equação $f(x) = x$. Veja Figura 2.4.

Exemplo 2.3 *Determine uma raiz da equação $x^3 + 2x - 5 = 0$ com um erro inferior a $\varepsilon = 0,001$.*

Seja $F(x) = x^3 + 2x - 5$. Por tentativas, obtemos $F(0) \cdot F(2) < 0$. Logo, a equação possui raiz no interior do intervalo $[0, 2]$. Escolhemos $x_1 = 1$ nesse intervalo como sendo a primeira aproximação da raiz.

Agora, para definir o $f(x)$, precisamos "isolar" o valor de x a partir da equação dada. Existem muitas possibilidades de se fazer isso. Duas delas são as seguintes:

- $x = \dfrac{5 - x^3}{2}$.
- $x = \sqrt[3]{5 - 2x}$.

No primeiro caso, definimos $f(x) = \dfrac{5 - x^3}{2}$. Temos $f'(x) = -3x^2/2$ e, daí, $|f'(x_1)| = |f'(1)| = 3/2 > 1$. Logo, neste caso, a sequência construída a partir de x_1 e $f(x)$ não converge para uma raiz da equação. Assim, abandonamos esta opção.

No segundo caso, definimos $f(x) = \sqrt[3]{5 - 2x} = (5 - 2x)^{\frac{1}{3}}$. Logo, $f'(x) = \frac{-2}{3}(5 - 2x)^{-\frac{2}{3}}$, e daí, $|f'(x_1)| = |f'(1)| = \frac{2}{3} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} = 0,320499 < 1$. Logo, neste caso, a sequência construída a partir de x_1 e $f(x)$ converge para uma raiz.

Construímos assim a seguinte tabela:

n	x_n	$\Delta = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
1	$1,00000$	$---$
2	$1,44224$	$0,44224$
3	$1,28372$	$0,15852$
4	$1,34489$	$0,06117$
5	$1,32195$	$0,02293$
6	$1,33064$	$0,00869$
7	$1,32736$	$0,00328$
8	$1,32860$	$0,00124$
9	$1,32814$	$0,00046 < \varepsilon$

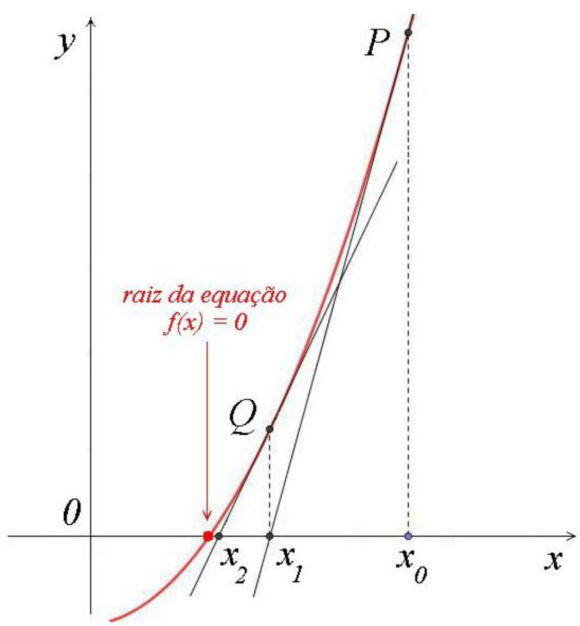
Portanto, uma raiz aproximada da equação dada é $1,32814$.

2.5 Método de Newton

Entre os métodos mais elementares para resolução numérica de uma equação, o método de Newton se destaca pela sua simplicidade e eficiência.

O inglês Isaac Newton (1643 – 1727) é considerado um dos maiores gênios da Matemática de todos os tempos, além de também ser físico, astrônomo, filósofo e teólogo. Sua imagem ainda hoje aparece nas notas de 1 libra esterlina da Inglaterra.

Seja $f(x)$ derivável em um intervalo $[a, b]$ que contém uma raiz da equação $f(x) = 0$. Consideremos x_0 um ponto desse intervalo que seja uma aproximação para uma raiz da equação. O método de Newton (também conhecido como Newton-Raphson) consiste em calcular uma nova aproximação a partir de x_0 como sendo a abscissa do ponto de interseção do eixo dos x com a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P = (x_0, f(x_0))$.



A equação da reta tangente em P é $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Substituindo $y = 0$ e $x = x_1$

nessa equação, obtemos $0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$ e daí

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

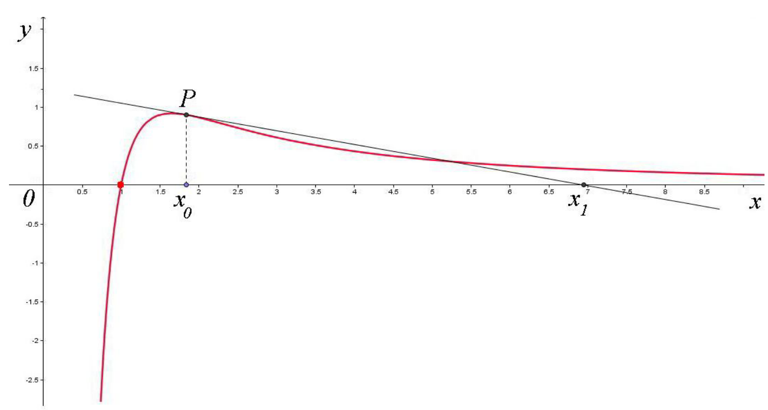
Podemos repetir esse tipo de construção para obtemos x_2 a partir de x_1 dado por $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, e, de modo semelhante: $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$. De um modo geral:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},}$$

para $n = 0, 1, 2, \cdots$

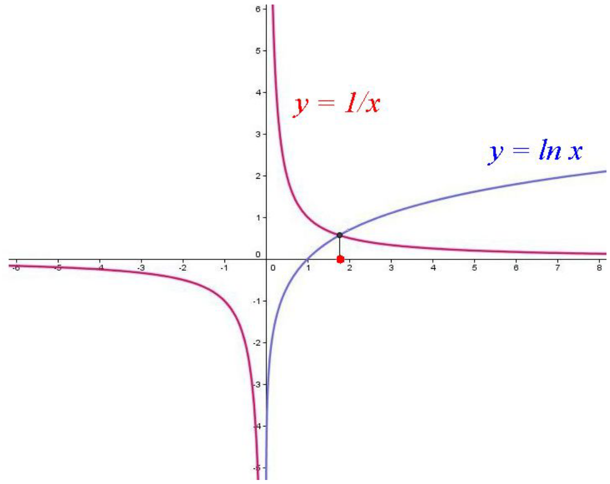
Observação

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ (veja gráfico a seguir). Uma raiz da equação $f(x) = 0$ claramente é $x = 1$. No entanto se tentarmos utilizar o método de Newton partindo da aproximação inicial $x_0 = 1,84$ (escolhido aleatoriamente), obtemos que $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 1,84 - 0.1801/(-0,0352) = 6,9507$. Sendo assim, o método de Newton não funciona neste caso pois o x_0 estava próximo da raiz da equação e, no entanto, o x_1 ficou muito distante.



Exemplo 2.4 *Determinar uma raiz da equação $x \ln x = 1$ com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-6}$.*

A equação dada é equivalente a $\ln x = \frac{1}{x}$. Os gráficos de $y = \ln x$ e $y = 1/x$ são mostrados na seguinte figura:



Logo, a equação tem uma raiz no intervalo $[1, 3]$. Alternativamente, podemos também concluir isso definindo $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ e observando que $f(1) < 0$ e $f(3) > 0$.

Escolhemos um número qualquer do interior do intervalo $[1,\ 3]$, por exemplo, $x_0 = 2$.

Usando que $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, aplicamos a fórmula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ até que $\Delta = |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ e construímos a seguinte tabela:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Δ
0	2,000000000	0,1931471806	0,7500000000	— — —
1	1,742470426	−0,0185939408	0,9032565539	0,257529574
2	1,763055874	−0,0001484030	0,8889094336	0,020585448
3	1,763222824	−0,0000000009	0,8887948093	0,000166950
4	1,763222834	−0,0000000003	0,8887948025	0,000000010 $< \varepsilon$

Portanto, a raiz aproximada é 1,763222834.

Exemplo 2.5 *Determinar uma raiz da equação $x^5 - x - 3 = 0$ com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-4}$.*

Seja $f(x) = x^5 - x - 3$. Por tentativas, obtemos: $f(1) = -3 < 0$ e $f(2) = 27 > 0$. Logo, a equação tem uma raiz no interior do intervalo $[1, 2]$. Como $|f(2)|$ é muito maior do que $|f(1)|$, isso significa que a raiz está mais próxima de 1 do que de 2. Escolhemos, finalmente, $x_0 = 1,2$ como sendo a aproximação inicial da raiz da equação.

Aplicando a fórmula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ até que $\Delta < \varepsilon$, constuímos a seguinte tabela: :

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Δ
0	1,200000	−1,711680	9,368000	— — —
1	1,382716	0,671630	17,276876	0,182716
2	1,343841	0,038844	15,306530	0,038875
3	1,341303	0,000148	15,183691	0,002538
4	1,341293	— — —	— — —	0,000010 $< \varepsilon$

Portanto, a raiz aproximada é $1,341293$. Note que não há necessidade de calcular $f(x_4)$ e nem $f'(x_4)$ porque esses valores serviriam apenas para os cálculos da próxima linha da tabela.

Exemplo 2.6 *Determinar uma raiz da equação* $x^4 - 4x^2 + 7x - 11 = 0$ *com um erro inferior a* $\varepsilon = 10^{-5}$.

Seja $f(x) = x^4 - 4x^2 + 7x - 11$. Por tentativas, obtemos: $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$. Logo, a equação tem uma no interior do intervalo $[1, 2]$. Escolhemos $x_0 = 1,5$ como sendo uma aproximação da raiz da equação.

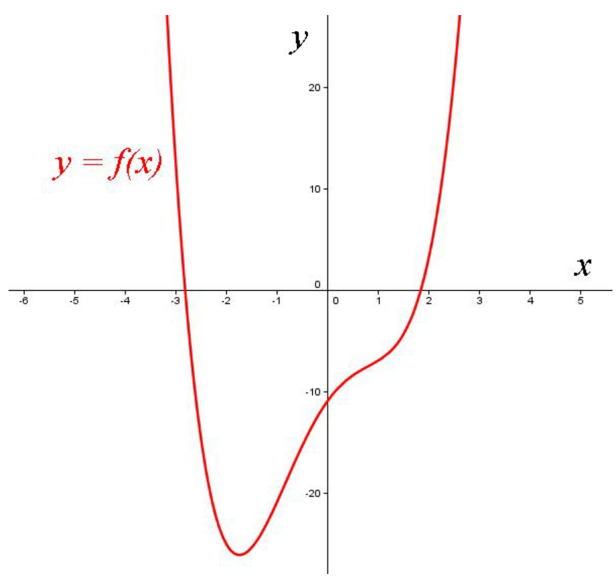
Aplicando várias vezes a fórmula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, constuímos a seguinte tabela:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Δ
0	$1,500000$	$-4,437500$	$8,500000$	— — —
1	$2,022059$	$3,517171$	$23,894074$	$0,522058$
2	$1,874860$	$0,419555$	$18,362414$	$0,147198$
3	$1,852012$	$0,008833$	$17,593120$	$0,022848$
4	$1,851510$	$0,000004$	$17,576477$	$0,000502$
5	$1,851509$	$0,000000$	$17,576469$	$0,0000002 < \varepsilon$

Portanto, a raiz aproximada é $1,851509$. Note que não há necessidade de calcular $f(x_5)$ e nem $f'(x_5)$.

Observação:

O gráfico de $f(x)$ é



Percebe-se na observação do gráfico que a equação $f(x) = 0$ tem duas raízes reais. Essas raízes reais são $-2,808412$ e $1,851509$. Como trata-se de uma equação do quarto grau, ela ainda tem mais duas raízes complexas: $0,478451 \pm i\,1,373517$.

Exemplo 2.7 *Dada uma constante $a > 0$, determine uma sequência (x_n) que convirja para $\sqrt{a}$.*

Sendo $x = \sqrt{a}$, temos $x^2 = a$, ou seja, $x^2 - a = 0$. Seja $f(x) = x^2 - a$. Então, a é raiz da equação $f(x) = 0$, e, usando o método de Newton, podemos definir uma sequência que converge para essa raiz.

A partir de $f(x) = x^2 - a$, obtemos $f'(x) = 2x$ e daí $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$, o que pode ser simplificado da seguinte forma: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} + \frac{a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$, de onde finalmente obtemos

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Escolhemos x_0 como sendo uma aproximação inicial da raiz, por exemplo, $x_0 = 1$.

Poderíamos usar um desenvolvimento semelhante a esse para encontrarmos sequências que convergem para $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, ...

Observações

- A quantidade de zeros na parte fracionária do Δ, antes do primeiro algarismo diferente de zero, no mínimo dobra a cada passo. Por causa disso, dizemos que o método de Newton tem *convergência quadrática.*

- Existem vários métodos mais recentes, mais sofisticados e mais eficientes do que o método de Newton. Mas, esses métodos são mais complicados. Por exemplo, o método de Householder propõe que a sequência (x_n) seja construída a partir da fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left[1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2}\right].$$

- Apesar de ter sido elaborado para funções de uma variável real, o método de Newton funciona também com números complexos. Por exemplo, a equação $x^4 + x^2 + 2 = 0$ não possui raízes reais. No entanto, o método de Newton fornece para essa equação a raiz complexa $0,97831834 + i\,0,67609672$, com apenas 6 iterações a partir da aproximação inicial $x_0 = 1 + i$.

2.6 Comparando os diversos métodos

Todos os métodos estudados são eficientes no sentido de resolverem uma grande variedade de equações. No entanto, uns métodos são mais eficientes do que outros pois resolvem o mesmo problema usando uma quantidade menor de passos (iterações) e, consequentemente, são mais rápidos.

Implementamos usando o Maxima (maxima.sourceforge.net) os métodos estudados e determinamos uma raiz da equação do quinto grau

$$x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 1 = 0$$

que está no intervalo $[a,\ b] = [0,\ \frac{1}{2}]$ com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-8}$. Em todos os casos a raiz obtida foi $0,19335536$. O desempenho de cada método está resumido na seguinte tabela.

Método	Bisseção	Cordas	Iter. Linear	Newton	Householder
N. iterações	26	8	7	4	3

Se tivéssemos usado outra equação, teríamos obtido resultado parecido com esse.

2.7 Exercícios Propostos

(P14) a) Usando o Método de Newton, escreva uma fórmula de recorrência de uma sequência de **coeficientes de x_n inteiros** que convirja para $\alpha = \sqrt{5 - \sqrt{3}}$.
Resp.: $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 10x_n^2 + 22}{4x_n^3 - 20x_n}$

b) Usando a sequência do item (a), partindo de $x_0 = 1$, calcule o valor de α com um erro no máximo igual a $\varepsilon = 10^{-4}$. Resp.: $\alpha \approx 1,807747$.

(P15) Deduza uma fórmula de recorrência para calcular a raiz cúbica de um número real. Use a fórmula obtida para calcular $\sqrt[3]{7}$ com erro inferior a 10^{-6}.
Resp.: $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right), \quad \sqrt[3]{7} \approx 1,91293118$.

(P16) Deduza uma fórmula de recorrência que permita calcular $\sqrt[s]{a}$ para qualquer número real positivo a e qualquer índice $s \geq 2$. Resp.: $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{s}\left((s-1)x_n + \frac{a}{x_n^{s-1}}\right)$.

(P17) Em cada caso a seguir, encontre um intervalo $[a, b]$ tal que a função $f(x)$ assuma valores com sinais opostos nas extremidades (isto é, $f(a)f(b) < 0$)

a) $f(x) = \ln(x-1) + x - 3$ b) $f(x) = e^x - x^2$ c) $f(x) = 2x^5 - 4x^2 + 11$

Resp.: a) $[2,\ 3]$ b) $[-1,\ 0]$ c) $[-2,\ 0]$.

(P18) A equação $f(x) = 2x\,\mathrm{sen}(4x) - 3 = 0$ possui uma infinidade de raízes (veja o gráfico de $f(x)$ na Figura 2.5). Determine pelo menos uma dessas raízes com um erro no máximo igual a 10^{-3} usando o método da bisseção. Resp.: $\pm 1,81415823$ ou $\pm 2,16481917$, etc.

(P19) Na Figura 2.6 está representada a função $f(x) = x^5 - 8x + 3$. Determine pelo menos uma das raízes da equação $x^5 - 8x + 3 = 0$ com erro inferior a $\varepsilon = 10^{-4}$ usando o método das cordas.
Resp.: $-1,76478607$ ou $0,37593863$ ou $1,57094136$.

(P20) A equação $2^x = x^2$ possui três raízes reais $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ e $x_3 < 0$. Determine a raiz x_3 com um erro inferior a 10^{-6}. Resp.: $x_3 \approx -0,766664695$.

(P21) Através de uma mudança de variável, toda equação polinomial do terceiro grau pode ser

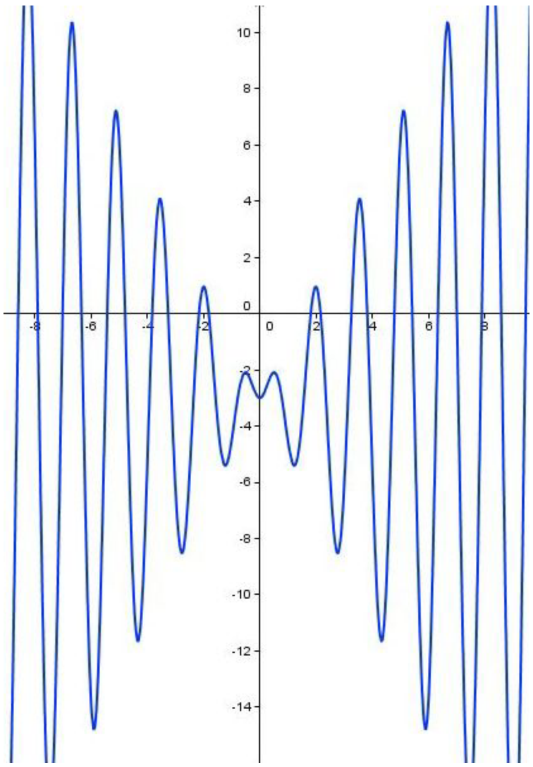


Figura 2.5: Exercício 16

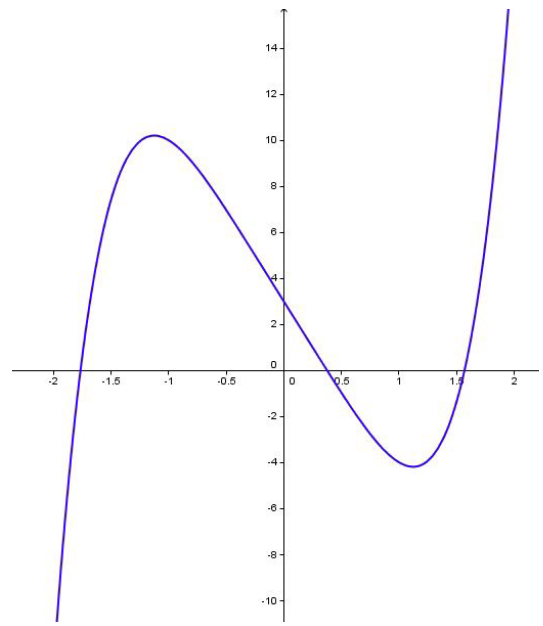


Figura 2.6: Exercício 17

reduzida à forma $x^3 + px + q = 0$ cuja solução exata pode ser calculada através da fórmula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \qquad (*)$$

Considerando a equação $x^3 + 3x - 11 = 0$, calcule uma raiz real de duas maneiras:

a) utilizando a fórmula de resolução (*) citada anteriormente;

b) utilizando o método de Newton a partir de $x_0 = 2$ com $\varepsilon = 10^{-5}$. Resp.: $1,781618$.

(P22) A equação $e^x = \operatorname{tg} x$ possui uma infinidade de soluções reais. Usando um dos métodos estudados, determine uma das soluções com um erro inferior a $0,0001$. Resp.: $1,306327$, entre outras possíveis soluções.

(P23) Usando o método de Newton, determine uma raiz da equação

$$2x^3 + \ln(x) = 5$$

com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-7}$. Resp.: $1,330839542$

(P24) Sendo f uma função derivável com derivada contínua, ao tentarmos resolver uma equação

$f(x) = 0$ pelo método de Newton, se usássemos equivocadamente a fórmula de recorrência

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)},$$

supondo a convergência da seqüência, seria encontrado raiz de qual equação? (Sugestão: calcule os limites quando $n \to \infty$). Resp.: É encontrado raiz de $f'(x) = 0$

(P25) O método de Househölder para determinação de uma raiz da equação $f(x) = 0$ consiste em verificar para qual valor a sequência

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left[1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2}\right]$$

converge. Usando esse método, determine a raiz da equação

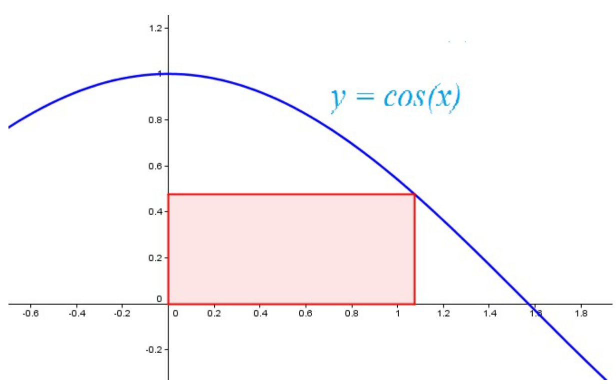
$$x^5 - 3x^3 + 5x - 11 = 0$$

que está no intervalo $[1, 2]$, com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-6}$. Resp.: $1,82055450$

(P26) Sendo $a \neq 0$, aplicando o método de Newton à função $f(x) = \frac{1}{x} - a$, mostre que se a sequência recorrente definida por $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$ for convergente, então ela converge para $\frac{1}{a}$.

(P27) Ao se tentar encontrar uma raiz da equação $x^6 - 5x^4 + x^3 - 11x^2 - 7x - 21 = 0$ pelo método de Newton, encontrou-se o quarto termo da sequência como sendo $x_4 = 3,17525997$. Qual é o termo x_9 dessa sequência? Resp.: $x_9 = 2,64575131$

(P28) Determine a área máxima de um retângulo que possa ser inscrito na região do primeiro quadrante delimitada pelos eixos coordenados e pelo gráfico da função $y = \cos(x)$.
Resp.: $A_{max} = 0,561096338$



(P29) Em uma calculadora ajustada em radianos, ao pressionarmos várias vezes a tecla $\boxed{\cos}$ da função cosseno, aparecerá no visor uma sequência de valores que converge para $0,73908513$. Esse valor é raiz de qual equação? Resp.: $\cos(x) = x$

(P30) Verifique que a utilização do método de Newton para a resolução da equação

$$3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x + 7 = 0$$

a partir de $x_0 = i$ leva à raiz aproximada $-0,9480 - 0,4842\,i$. De modo semelhante, se for utilizada $x_0 = 2 + i$ como aproximação inicial da raiz, então chega-se a $1,2813 + 0,6459\,i$. (Consequentemente, as outras raízes são $-0,9480 + 0,4842\,i$ e $1,2813 - 0,6459\,i$.)

Capítulo 3

Sistemas Lineares

3.1 Sistemas Lineares

Um sistema de equações é denominado *linear* quando todas as equações são polinomiais do primeiro grau. Por exemplo, $\left\{\begin{array}{rcl} 3x - 7y & = & 2 \\ 5x + 6y & = & 10 \end{array}\right.$ é linear, enquanto que $\left\{\begin{array}{rcl} 5x^2 - 2y & = & -1 \\ 5x + 6y^3 & = & 1 \end{array}\right.$ não o é.

3.2 Método de Eliminação de Gauss

O alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) é considerado por muitos como o maior gênio de toda a história da Matemática.

Entre as muitas fórmulas e teoria matemática que ele elaborou, descrevemos aqui uma técnica simples e eficiente para resolução de sistemas lineares.

O método de eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema linear em outro equivalente (de mesma solução) que tenha matriz dos coeficientes no formato triangular superior, como por exemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \ddots \quad \ddots & & \vdots \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Nesse formato, em determinada linha, se x_j for a variável associada ao primeiro coeficiente não nulo da linha, então todos os coeficientes de x_j das linhas abaixo dela são iguais a 0.

A partir daí, calculamos os valores de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de baixo para cima:

$$x_n \to x_{n-1} \to \cdots \to x_3 \to x_2 \to x_1$$

Primeiro calculamos x_n na última equação. Depois, substituímos na penúltima e calculamos x_{n-1}. Por último, substituímos $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2$ na primeira equação e calculamos x_1.

Para transformar o sistema linear no formato triangular superior, podemos usar operações elementares com as linhas:

- Trocar a linha i pela linha j. Em símbolos: $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Substituir a linha i pela mesma linha multiplicada por uma constante $k \neq 0$. Em símbolos: $L_i = kL_i$ (ou $L_i \leftarrow kL_i$).
- Substituir a linha i pela soma dela com outra linha j. Em símbolos: $L_i = L_i + L_j$ (ou $L_i \leftarrow L_i + L_j$).

É permitido fazer várias operações elementares de uma única vez, como em $L_i = aL_i + bL_j$, bem como subtrair linhas ou dividir uma linha por uma constante: $L_i - L_j = L_i + (-1)L_j$ e $\frac{L_i}{k} = (\frac{1}{k})L_i$.

É recomendável (mas não obrigatório) que o primeiro coeficiente não nulo de cada linha seja igual a 1. Sendo assim, se o primeiro elemento não nulo da linha i for $a_{ij} = 1$, então podemos utilizar operações do tipo $L_k = L_k - a_{kj}L_i$ para $k = i+1, i+2, i+3, \cdots$

Exemplo 3.1 *Determinar a solução de*

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z & = & 13 \\ x - 7y + 2z & = & 17 \\ 5x + 8y - z & = & -2 \end{cases}$$

Solução: Efetuamos as seguintes operações com as linhas do sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z & = & 13 & (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ x - 7y + 2z & = & 17 \\ 5x + 8y - z & = & -2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x - 7y + 2z & = & 17 \\ 2x + 3y + 3z & = & 13 & (L_2 = L_2 - 2L_1) \\ 5x + 8y - z & = & -2 & (L_3 = L_3 - 5L_1) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x - 7y + 2z &= 17 \\ 17y - z &= -21 \\ 43y - 11z &= -87 \end{cases} \quad (L_2 = \tfrac{1}{17}L_2)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x - 7y + 2z &= 17 \\ y - \frac{1}{17}z &= -\frac{21}{17} \\ 43y - 11z &= -87 \end{cases} \quad (L_3 = L_3 - 43L_2)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x - 7y + 2z &= 17 \\ y - \frac{1}{17}z &= -\frac{21}{17} \\ -11z &= -44 \end{cases}$$

Note que obtivemos um formato triangular para o sistema, que o x foi eliminado da segunda e terceira equações e que o y foi eliminado da terceira equação.

Da última equação obtemos: $-11z = -44$, ou seja, $z = 4$. Substituindo esse valor de z na segunda equação obtemos $y = \frac{4}{17} - \frac{21}{17} = -1$ e, finalmente, substituindo os valores de y e z na primeira equação, obtemos que $x = 17 + 7y - 2z = 17 - 7 - 8 = 2$. Portanto a solução do sistema é $x = 2, y = -1, z = 4$.

Exemplo 3.2 *Determinar a solução de*

$$\begin{cases} 3x + y + z + w &= 6 \\ 2x - 3y - 3z - w &= -2 \\ x - y + 4z + 5w &= -11 \\ 2x + 2y - z - 10w &= 37 \end{cases}$$

Solução: No exemplo anterior, escrevemos todas as variáveis em todos os passos da solução. Isso não era necessário pois bastava escrever os coeficientes de cada equação. Portanto, neste exemplo, vamos ser um pouco mais econômicos e escrever apenas a matriz dos coeficientes das equações do sistema. E depois, vamos fazer operações elementares com as linhas dessa matriz.

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 2 & 2 & -1 & -10 & 37 \end{bmatrix} \begin{matrix} (L_1 \leftrightarrow L_3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 2 & -3 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & -10 & 37 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (L_2 = L_2 - 2L_1) \\ (L_3 = L_3 - 3L_1) \\ (L_4 = L_4 - 2L_1) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 0 & -1 & -11 & -11 & 20 \\ 0 & 4 & -11 & -14 & 39 \\ 0 & 4 & -9 & -20 & 59 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (L_2 = (-1)L_2) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 0 & \boxed{1} & 11 & 11 & -20 \\ 0 & 4 & -11 & -14 & 39 \\ 0 & 4 & -9 & -20 & 59 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (L_3 = L_3 - 4L_2) \\ (L_4 = L_4 - 4L_2) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 11 & 11 & -20 \\ 0 & 0 & -55 & -58 & 119 \\ 0 & 0 & -53 & -64 & 139 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (L_3 = (-\frac{1}{55})L_3) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 11 & 11 & -20 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{58}{55} & -\frac{119}{55} \\ 0 & 0 & -53 & -64 & 139 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (L_4 = L_4 + 53L_3) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 11 & 11 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{58}{55} & -\frac{119}{55} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{446}{55} & \frac{1338}{55} \end{bmatrix}$$

que é uma matriz no formato triangular superior: em cada linha, os elementos que estão abaixo do primeiro elemento não nulo são todos iguais a zero. Essa matriz é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z + 5w &= -11 \\ y + 11z + 11w &= -20 \\ z + \frac{58}{55}w &= -\frac{119}{55} \\ -\frac{446}{55}w &= \frac{1338}{55} \end{cases}$$

- A quarta equação é $-\frac{446}{55}w = \frac{1338}{55}$, de onde obtemos $w = -3$.
- A terceira equação é $z + \frac{58}{55}w = -\frac{119}{55}$, o que fornece $z = -\frac{58}{55} \cdot (-3) - \frac{119}{55} = 1$.
- Da segunda equação, obtemos $y = -11z - 11w - 20 = -11 + 33 - 20 = 2$.
- Da primeira equação, temos $x = y - 4z - 5w - 11 = 2 - 4 + 15 - 11 = 2$.

Portanto, a solução do sistema é $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$ e $w = -3$.

Exemplo 3.3 *Determinar a solução geral de*

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - w &= 2 \\ 3x - y + 3z + 4w &= 9 \\ x + 2y + 3z + 4w &= 10 \end{cases}$$

Solução: A matriz completa desse sistema é $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$. Efetuamos a seguinte sequência de operações elementares com as linhas da matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{(L_1 \leftrightarrow L_3)} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 3 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (L_2 = L_2 - 3L_1) \\ (L_3 = L_3 - 2L_1) \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -7 & -6 & -8 & -21 \\ 0 & -5 & -4 & -9 & -18 \end{bmatrix} (L_2 = -\tfrac{1}{7}L_2) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{6}{7} & \frac{8}{7} & 3 \\ 0 & -5 & -4 & -9 & -18 \end{bmatrix} (L_3 = L_3 + 5L_2)$$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{8}{7} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{23}{7} & -3 \end{bmatrix}$ que é uma matriz no formato triangular superior e que corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w &= 10 \\ y + \frac{6}{7}z + \frac{8}{7}w &= 3 \\ \frac{2}{7}z - \frac{23}{7}w &= -3 \end{cases}$$

Como o sistema tem mais variáveis do que equações, alguma variável tem que ficar livre, ou seja, sem ser calculada. Escolhemos uma das variáveis para ficar livre. Por exemplo, podemos escolher w como variável livre do sistema. Isso significa que x, y, z ficam escritos em função de w.

- A última equação do sistema é $\frac{2}{7}z - \frac{23}{7}w = -3$ de onde obtemos $z = \dfrac{-21 + 23w}{2}$
- A segunda equação é $y + \frac{6}{7}z + \frac{8}{7}w = 3$ de onde obtemos $y = 3 - \frac{6}{7}z - \frac{8}{7}w$, ou seja, $y = 3 - \frac{6}{7}(\frac{-21+23w}{2}) - \frac{8}{7}w = \frac{84-77w}{7}$.
- A primeira equação é $x + 2y + 3z + 4w = 10 \Rightarrow x = 10 - 2y - 3z - 4w$. Substituindo os valores de y e z obtidos anteriormente e simplificando, obtemos $x = \frac{245-231w}{14}$.

Portanto, a solução geral do sistema é $x = \dfrac{245 - 231w}{14}$, $y = \dfrac{84 - 77w}{7}$, $z = \dfrac{-21 + 23w}{2}$, $\forall w \in \mathbb{R}$. Escolhendo valores para w, obtemos soluções particulares do sistema. Por exemplo, para $w = 1$, obtemos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$ como solução particular. Para $w = 0$, obtemos $x = \frac{245}{14}$, $y = \frac{84}{7}$ e $z = \frac{-21}{2}$ como sendo outra solução particular.

Observação:

Esse método de eliminação aqui apresentado se aplica a todo tipo de sistema linear. Até mesmo os sistemas que não têm soluções (impossíveis) podem ser estudados por esse método. No caso do sistema ser impossível, em algum momento durante a resolução, aparecerá uma linha que será sempre falsa como algo do tipo $1 = 0$ ou $1 = 2$ etc.

3.3 Exercícios Propostos

(P31) a) Dê exemplo de um sistema linear com 4 equações nas variáveis x, y, z e t cuja única solução seja $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ e $t = 4$.

b) Resolva o sistema do item (a) usando o método de eliminação de Gauss.

Resp.: Inicialmente, escrevemos aleatoriamente os primeiros membros de quatro equações nas variáveis x, y, z, t:

$$\begin{cases} 5x + y + 10z - 3t &= \dots \\ 7x - 2y - 2z - 5t &= \dots \\ -3x + 4y + z + t &= \dots \\ -x - y - z + 14t &= \dots \end{cases}$$

Para o sistema ter solução única deve-se ter o cuidado de não escrever uma equação como combinação linear das outras e nem a matriz-coluna formada pelos coeficientes de uma variável não ser combinação linear das matrizes-colunas dos coeficientes das outras variáveis. Depois, substituímos a solução desejada $x = 1,\ y = 2,\ z = 3,\ t = 4$ nas equações acima e obtemos o exemplo desejado:

$$\begin{cases} 5x + y + 10z - 3t &= 25 \\ 7x - 2y - 2z - 5t &= -23 \\ -3x + 4y + z + t &= 12 \\ -x - y - z + 14t &= 50 \end{cases}$$

(P32) Encontre a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 4x + 2y + z - 2t &= 3 \\ 3x - 3y - z - t &= 2 \\ 3x + 5y + z + t &= 0 \\ x - y - z + 4t &= -2 \end{cases}$$

usando o método de eliminação de Gauss. Resp.: $x = 6/13,\ y = -5/13,\ z = 1,\ t = -6/13.$

(P33) Encontre a solução geral do sistema

$$\begin{cases} 4x + 2y + z + w &= 13 \\ 3x - 3y - t + w &= 5 \\ x + 5y + z + t &= 8 \\ 2x - z + 4t - 5w &= 0 \end{cases}$$

usando o método de eliminação de Gauss.

Resp.: $x = \dfrac{-10t + 10w + 49}{24}, y = \dfrac{-6t + 6w + 3}{8}, z = \dfrac{-38t + 50w - 49}{12}, \quad \forall t, w \in \mathbb{R}.$

(P34) Determine a solução do sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} + \frac{4}{w} &= 13 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} + \frac{1}{w} &= 8 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z} + \frac{2}{w} &= 23 \\ \frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} + \frac{3}{w} &= 26 \end{cases}$$

(Sugestão: faça mudanças de variáveis $1/x = p$, $1/y = q$, etc.)
Resp.: $x = \frac{1}{5},\ y = 1,\ z = -\frac{1}{2},\ w = \frac{1}{3}$

(P35) Determine a solução não nula de $\left\{\begin{array}{rcl} 4yzw + 2xzw + xyw + xyz & = & 13xyzw \\ 3yzw + xzw + 2xyw + 5xyz & = & 10xyzw \\ yzw + 2xzw - 3xyw + 4xyz & = & -5xyzw \\ 5yzw - 4xzw - xyw + xyz & = & 8xyzw \end{array}\right.$

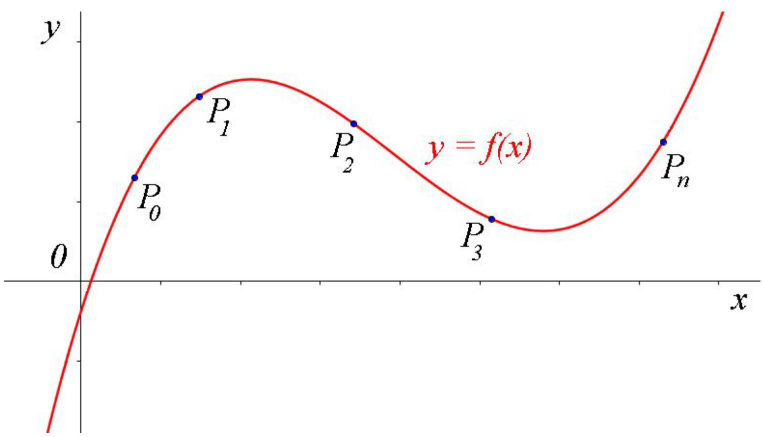
(Sugestão: divida todas as equações por $xyzw$). Resp.: $x = \frac{37}{95},\ y = \frac{15}{8},\ z = \frac{185}{404},\ w = -\frac{555}{289}$

Capítulo 4

Interpolação

4.1 Introdução

Dados $n+1$ pontos do plano $P_0 = (x_0,\, y_0)$, $P_1 = (x_1,\, y_1)$, $\cdots$, $P_n = (x_n,\, y_n)$, tais que $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, nosso principal objetivo neste capítulo é encontrar uma função $f(x)$ tal que $f(x_i) = y_i$, $\forall i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, ou seja, uma função cujo gráfico passe por todos os pontos P_i dados.



Vamos denominar essa função $f(x)$ de *função de interpolação* dos pontos dados. Neste capítulo, por uma questão de simplicidade, vamos supor que essa função é polinomial e de menor grau possível.

Funções de interpolação são muito utilizadas em aplicações da Matemática para fazer previsões de valores de funções dentro de certo intervalo. Por exemplo, suponhamos que a população de uma cidade tenha crescido em algumas décadas de acordo com o que é mostrado em uma tabela:

Ano	1950	1960	1970	1980	1990	2000
N. habitantes	34000	42000	60550	110200	180980	250450

Podemos encontrar a função de interpolação $p(x)$ associada a esses dados e, a partir dela, fazer previsões da população da cidade em outros anos do intervalo [1950, 2000]. Por exemplo, $p(1975)$

daria uma idéia razoável da população no ano de 1975, enquanto que $p(1985)$ daria uma estimativa para a população em 1985.

Observações

- Quando $n = 1$ temos apenas dois pontos P_0 e P_1. Neste caso, a função de interpolação é uma função do primeiro grau $f(x) = ax + b$, seu gráfico é uma reta e a interpolação é denominada *linear*.

- Quando $n = 2$, temos três pontos P_0, P_1 e P_2 e a função de interpolação é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ cujo gráfico é uma parábola e a interpolação é denominada *quadrática*.

4.2 Método de Lagrange

Nesta seção, vamos descrever um método de interpolação proposto pelo matemático francês Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).

Dados $n+1$ pontos $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $\cdots$, $P_n = (x_n, y_n)$, tais que $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, definimos os seguintes polinômios $\ell_0(x), \ell_1(x), \cdots, \ell_n(x)$:

- $\ell_0(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\cdots(x_0 - x_n)}$

- $\ell_1(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)}$

- $\ell_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}$
- $\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$
- $\ell_n(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}$

Note que na definição de cada $\ell_i(x)$ o x_i não aparece no numerador, mas aparece várias vezes no denominador.

Vamos agora calcular o valor de cada $\ell_i(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$:

- $\ell_0(x_0) = 1$, $\ell_0(x_1) = 0$, $\ell_0(x_2) = 0$, $\cdots$, $\ell_0(x_n) = 0$
- $\ell_1(x_0) = 0$, $\ell_1(x_1) = 1$, $\ell_1(x_2) = 0$, $\cdots$, $\ell_1(x_n) = 0$
- $\ell_2(x_0) = 0$, $\ell_2(x_1) = 0$, $\ell_2(x_2) = 1$, $\cdots$, $\ell_2(x_n) = 0$
- $\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$
- $\ell_n(x_0) = 0$, $\ell_n(x_1) = 0$, $\ell_n(x_2) = 0$, $\cdots$, $\ell_n(x_n) = 1$

Obtivemos desse modo que

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Definindo

$$P(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + y_2\ell_2(x) + \cdots + y_n\ell_n(x),$$

temos que:

- $P(x_0) = y_0 \underbrace{\ell_0(x_0)}_{=1} + y_1 \underbrace{\ell_1(x_0)}_{=0} + y_2 \underbrace{\ell_2(x_0)}_{=0} + \cdots + y_n \underbrace{\ell_n(x_0)}_{=0} = y_0$
- $P(x_1) = y_0 \underbrace{\ell_0(x_1)}_{=0} + y_1 \underbrace{\ell_1(x_1)}_{=1} + y_2 \underbrace{\ell_2(x_1)}_{=0} + \cdots + y_n \underbrace{\ell_n(x_1)}_{=0} = y_1$
- $\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$
- $P(x_n) = y_0 \underbrace{\ell_0(x_n)}_{=0} + y_1 \underbrace{\ell_1(x_n)}_{=0} + y_2 \underbrace{\ell_2(x_n)}_{=0} + \cdots + y_n \underbrace{\ell_n(x_n)}_{=1} = y_n$

Portanto, $P(x_i) = y_i$ para todo $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Isso significa que $P(x)$ é uma função de interpolação dos pontos P_i e que é denominado *polinômio de interpolação de Lagrange*.

Observação

As definições dos $\ell_i(x)$ e $P(x)$ podem ser abreviadas se forem utilizadas as notações de *produtório* e *somatório*: $\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$ e $P(x) = \sum_{k=0}^{n} (y_k \ell_i(x)) = \sum_{k=0}^{n} \left(y_k \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$

Exemplo 4.1 *A respeito de uma função $f(x)$ é conhecida a seguinte tabela de valores:*

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	-10	-10	-8	8

Determine o polinômio de interpolação $P(x)$ desses pontos e, supondo $f(x) \approx P(x)$, obtenha uma estimativa para $f(1/2)$.

Solução: Sejam $(x_0, y_0) = (-2, 4)$, $(x_1, y_1) = (-1, -10)$, $(x_2, y_2) = (0, -10)$, $(x_3, y_3) = (1, -8)$ e $(x_4, y_4) = (2, 8)$. O polinômio de interpolação de Lagrange é

$$\begin{aligned} P(x) = {} & y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} \\ & + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} \\ & + y_4 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} P(x) = {} & 4 \cdot \frac{(x + 1)x(x - 1)(x - 2)}{(-2 + 1)(-2)(-2 - 1)(-2 - 2)} - 10 \cdot \frac{(x + 2)x(x - 1)(x - 2)}{(-1 + 2)(-1)(-1 - 1)(-1 - 2)} \\ & - 10 \cdot \frac{(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{(0 + 2)(0 + 1)(0 - 1)(0 - 2)} - 8 \cdot \frac{(x + 2)(x + 1)x(x - 2)}{(1 + 2)(1 + 1)(1)(1 - 2)} \\ & + 8 \cdot \frac{(x + 2)(x + 1)x(x - 1)}{(2 + 2)(2 + 1)(2)(2 - 1)}. \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos $P(x) = x^4 + x - 10$. E por fim, a previsão para o valor de $f(\frac{1}{2})$:

$$f(\frac{1}{2}) \approx P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} - 10 = -\frac{151}{16} = -9,4375.$$

4.3 Método de Newton

4.3.1 Diferenças divididas

Seja $f(x)$ uma função da qual se conhecem seus valores em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ do seu domínio. Definimos:

- $f[x_0] = f(x_0)$
- $f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$
- $f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
- $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
- $\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$
- $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \dfrac{f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_0, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

Dizemos que $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ é a *diferença dividida* de ordem k de f calculada nos pontos $x_0, x_1, \cdots, x_k$ e é denotada de forma abreviada por $\Delta^k f$. Note que o cálculo de uma $\Delta^k f$ depende de todas as $\Delta^j f$ anteriores para $j < k$.

Vamos organizar as diferenças divididas calculadas no formato da seguinte tabela:

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\cdots$	$\Delta^n f$
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$\cdots$	$---$
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$\cdots$	$---$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$---$
x_n	$f(x_n)$	$---$	$---$	$---$	$---$

Essa tabela tem um formato triangular pois os valores abaixo da diagonal secundária não são calculados.

Observação

A ordem dos pontos x_i não influencia no resultado final: $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$, $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_1, x_0] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_0, x_1]$, etc.

Exemplo 4.2 *Construir a tabela de diferenças divididas da função $f(x)$ cujos valores conhecidos são dados a seguir:*

x	-2	0	1	2	4	5
$f(x)$	5	1	3	-1	-1	0

Solução: A quantidade de pontos dados é 6. Logo, $n = 6 - 1 = 5$. Isso significa que a última coluna da tabela será a do $\Delta^5 f$.

Calculamos as seguintes subtrações e divisões:

- Δf: $\frac{1-5}{0-(-2)} = -2$, $\frac{3-1}{1-0} = 2$, $\frac{-1-3}{2-1} = -4$, $\frac{-1-(-1)}{4-2} = 0$, $\frac{0-(-1)}{5-4} = 1$
- $\Delta^2 f$: $\frac{2-(-2)}{1-(-2)} = \frac{4}{3}$, $\frac{-4-2}{2-0} = -3$, $\frac{0-(-4)}{4-1} = \frac{4}{3}$, $\frac{1-0}{5-2} = \frac{1}{3}$
- $\Delta^3 f$: $\frac{-3-\frac{4}{3}}{2-(-2)} = -\frac{13}{12}$, $\frac{\frac{4}{3}-(-3)}{4-0} = \frac{13}{12}$, $\frac{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}{5-1} = -\frac{1}{4}$
- $\Delta^4 f$: $\frac{\frac{13}{12}-\frac{(-13)}{12}}{4-(-2)} = \frac{13}{36}$, $\frac{-\frac{1}{4}-\frac{13}{12}}{5-0} = -\frac{4}{15}$
- $\Delta^5 f$: $\frac{-\frac{4}{15}-\frac{13}{36}}{5-(-2)} = -\frac{113}{1260}$

E, finalmente, montamos a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	Δ^3	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
-2	5	-2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{13}{12}$	$\frac{13}{36}$	$-\frac{113}{1260}$
0	1	2	-3	$\frac{13}{12}$	$-\frac{4}{15}$	$---$
1	3	-4	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$---$	$---$
2	-1	0	$\frac{1}{3}$	$---$	$---$	$---$
4	-1	1	$---$	$---$	$---$	$---$
5	0	$---$	$---$	$---$	$---$	$---$

4.3.2 Polinômio de interpolação segundo Newton

A partir da definição de diferença dividida de ordem 1 de $f(x)$, temos que:

$$f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Podemos isolar o valor de $f(x)$ na igualdade anterior para obtermos:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x].$$

De modo semelhante, a partir da definição de $f[x_1, x_0, x]$, obtemos

$$f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

de onde obtemos o seguinte valor para $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x].$$

E, de modo geral, a partir da definição de $f[x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0, x]$, obtemos

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x]$$

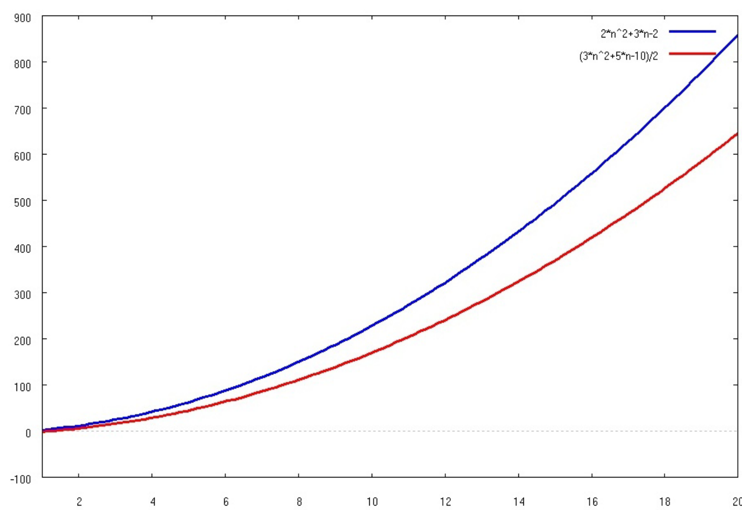
Essa expansão de $f(x)$ serve de motivação para a definição do seguinte polinômio $P(x)$ que é denominado *polinômio de interpolação de Newton:*

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n]$$

Note que a diferença entre os desenvolvimentos de $f(x)$ e de $P(x)$ está apenas no final das expressões: em uma aparece x e na outra aparece x_n.

Observação:

Dados $n+1$ pontos, pode-se mostrar que o total de adições, multiplicações e divisões usadas no cálculo do polinômio de interpolação pelo método de Lagrange é de $2n^2 + 3n - 2$ operações e pelo método de Newton é de $\frac{3n^2+5n-10}{2}$ operações. Por exemplo, para $n = 10$ o método de Lagrange usa 228 operações, enquanto que o de Newton usa 170. Em geral, o método de Newton requer sempre menos operações do que o de Lagrange. Veja gráfico a seguir.



Exemplo 4.3 *Construir a tabela de diferenças divididas da função $f(x)$ cujos valores conhecidos são dados a seguir e determine seu polinômio de interpolação.*

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-8	3	-4	-17	0

A partir do polinômio de interpolação obtido, obtenha uma estimativa para $f(3/2)$.

Solução: A partir dos valores dados, fazendo diversas operações de subtração e divisão ($\frac{3-(-8)}{0-(-1)} = 11$, $\frac{-4-3}{1-0} = -7$, $\frac{-7-11}{1-(-1)} = -9$, etc.) montamos a tabela de todas as diferenças divididas de $f(x)$:

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
-1	-8	11	-9	2	1
0	3	-7	-3	6	$---$
1	-4	-13	15	$---$	$---$
2	-17	17	$---$	$---$	$---$
3	0	$---$	$---$	$---$	$---$

A partir dos elementos da primeira linha e primeira coluna da tabela (com exceção apenas do elemento da última linha da primeira coluna) escrevemos o polinômio de interpolação:

$$P(x) = -8 + 11(x - (-1)) + (-9)(x - (-1))(x - 0) + 2(x - (-1))(x - 0)(x - 1) \\ + 1(x - (-1))(x - 0)(x - 1)(x - 2)$$

Simplificando a expressão anterior, obtemos

$$P(x) = x^4 - 10x^2 + 2x + 3$$

A partir daí, obtemos também que $f(\frac{3}{2}) \approx P(\frac{3}{2}) = \frac{81}{16} - 10 \cdot \frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 = -\frac{183}{16} = -11,4375$.

Exemplo 4.4 *Usando o método de interpolação de Newton, obtenha uma estimativa para $f(0)$, sendo $f(x)$ uma função cujos valores conhecidos são:*

x	-1	1	2	3	5
$f(x)$	-4	0	3	5	3

Solução: A tabela de diferenças divididas é:

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
-1	-4	2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{72}$
1	0	3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$---$
2	3	2	-1	$---$	$---$
3	5	-1	$---$	$---$	$---$
5	3	$---$	$---$	$---$	$---$

A partir da primeira linha e primeira coluna da tabela, escrevemos o polinômio de interpolação segundo o método de Newton:

$$P(x) = -4 + 2(x - (-1)) + \frac{1}{3}(x - (-1))(x - 1) + (-\frac{5}{24})(x - (-1))(x - 1)(x - 2) \\ + \frac{1}{72}(x - (-1))(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Efetuando todas as multiplicações e adições indicadas e simplificando, obtemos

$$P(x) = \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{18}x^3 + \frac{59}{72}x^2 + \frac{41}{18}x - \frac{17}{6}.$$

E supondo $f(x) \approx P(x)$ obtemos finalmente que $f(0) \approx P(0) = -\frac{17}{6}$. (OBS.: Para obter $f(0)$ não é necessário simplificar o polinômio $P(x)$, podemos calcular esse valor na expressão para $P(x)$ antes de efetuar qualquer multiplicação ou adição).

4.4 Cálculo do erro da interpolação

O seguinte teorema pode ser usado para calcular o erro de interpolação, ou seja, o erro cometido na substituição de $f(x)$ pelo $P(x)$, onde $P(x)$ é o polinômio de interpolação (não importando qual tenha sido o método para obtê-lo).

Teorema 4.4.1 *Consideremos os pontos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ um total de $n+1$ pontos dados no domínio de uma função $f(x)$. Se $f(x)$ for continuamente derivável até ordem $n+1$ e se $P(x)$ for o polinômio de interpolação de $f(x)$ nesses pontos dados, então em qualquer $x \in [x_0, x_n]$ temos que o erro absoluto da interpolação ε_x é dado por*

$$\varepsilon_x = |f(x) - P(x)| = |x - x_0| \cdot |x - x_1| \cdot |x - x_2| \cdots |x - x_n| \cdot \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right|$$

onde c é algum ponto do interior do intervalo $[x_0, x_n]$.

A demonstração pode ser encontrada nas referências bibliográficas [7] ou [2].

4.5 Exercícios Propostos

(P36) Sabendo que o gráfico da função *logaritmo natural* passa pelos pontos $P_1 = (2,0;\ 0,693147)$, $P_2 = (2,5;\ 0,916291)$ e $P_3 = (3,0;\ 1,098612)$, determine seu polinômio de interpolação e, a partir dele, obtenha uma aproximação para $\ln(2,7)$.
Resp.: $P(x) = -0,081646x^2 + 0,813695x - 0,607659$, $\ln(2,7) \approx 0,994118$.

(P37) O gráfico da função seno passa pelos pontos $A = (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$, $B = (\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $C = (\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $D = (\frac{\pi}{2}, 1)$. Usando seu polinômio de interpolação nesses pontos, obtenha uma aproximação para $\text{sen}(\frac{2\pi}{5})$. Resp.: $\text{sen}(\frac{2\pi}{5}) \approx 0,951862$

(P38) De acordo com informações da página do IBGE na *Internet*, a população da cidade de João Pessoa nos anos 1991, 1996 e 2000 era 497.600, 549.363 e 597.934 habitantes, respectivamente. Usando interpolação polinomial, obtenha uma estimativa para a população de João Pessoa no ano de 1998. Resp.: 572853 hab.

(P39)

$$\begin{cases} a + b + c + d & = & 10 \\ a + 2b + 4c + 8d & = & 3 \\ a + 3b + 9c + 27d & = & -5 \\ a + 5b + 25c + 125d & = & 7 \end{cases}$$

(Sugestão: determine o polinômio de interpolação $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ dos pontos $(1, 10)$, $(2, 3)$, $(3, -5)$, $(5, 7)$)
Resp.: $a = \frac{33}{4}$, $b = \frac{209}{24}$, $c = -\frac{33}{4}$, $d = \frac{31}{24}$

(P40) Determine uma função polinomial cujo gráfico passe pelos pontos $A = (-1,\ -1)$, $B = (0,\ -1)$, $C = (1,\ 1)$, $D = (2,\ -7)$ e $E = (3,\ -13)$. Resp.: $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x - 1$

(P41) Sejam x_0, x_1 e x_2 números reais e $f(x)$ uma função de uma variável. Mostre que $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$ e que $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_2, x_0]$.

(P42) O *Teorema Fundamental da Álgebra* afirma que um polinômio não nulo de grau n tem exatamente n raízes (reais ou complexas). Usando este resultado, mostre que o polinômio de interpolação $P_L(x)$ dos pontos da tabela

x	x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

obtido segundo a fórmula de Lagrange e o polinômio $P_N(x)$ obtido segundo a fórmula de Newton coincidem. (*Sugestão:* conte quantas raízes tem o polinômio $f(x) = P_L(x) - P_N(x)$ e conclua).

(P43) Considere $f(x)$ uma função de uma variável da qual é conhecida apenas a tabela de valores

x	x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

e o seu polinômio de interpolação $P(x)$. Supondo $f'(x) \approx P'(x)$, mostre que

$$f'(x_0) \approx f[x_0, x_1] + (x_0 - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \cdots + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n].$$

Capítulo 5

Cálculo de Integrais

5.1 Introdução

O cálculo de integrais definidas é importante porque está associado a diversos problemas de Física, de Equações Diferenciais, a problemas geométricos tais como o cálculo de comprimento de curvas, áreas de superfícies, volumes de sólidos, entre outros. Por isso, é conveniente que se tenha técnicas de cálculos que sejam eficientes e, preferencialmente, de fácil utilização.

Se uma função é contínua em $[a, b]$, então o Teorema Fundamental do Cálculo afirma que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

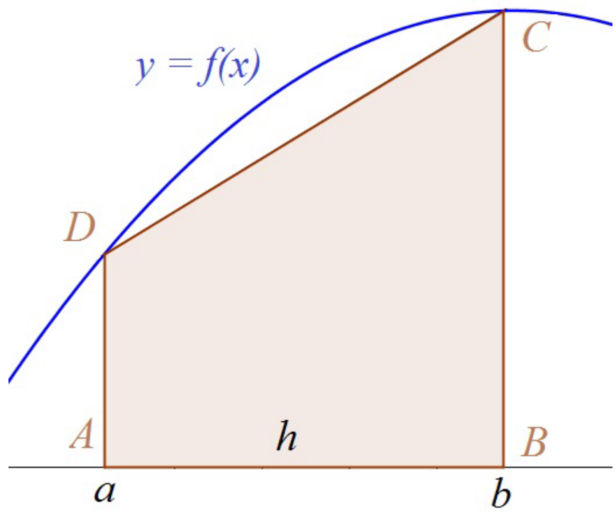
onde $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Isso significa que o cálculo de uma integral é imediato quando se conhece uma primitiva $F(x)$ para a função $f(x)$.

No entanto, o cálculo de uma primitiva pode ser muito trabalhoso ou até mesmo impossível de ser efetuado por meios elementares, ou seja, usando somente as funções elementares (polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas etc.). Por exemplo, as primitivas das funções e^{x^2}, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $\sqrt{\cos x}$ não são elementares.

O cálculo numérico aproximado, em geral, consiste no cálculo de um somatório em vez da primitiva de alguma função. Muitas vezes, somatórios com poucas parcelas produzem bons resultados. As fórmulas usadas no cálculo numérico de integrais simples são chamadas *fórmulas de quadratura*.

5.2 Regra dos Trapézios

Algumas técnicas de cálculo aproximado de integrais consistem na aproximação da função $f(x)$ por um polinômio de interpolação $P(x)$ e, assim, usar $\int_a^b P(x)dx$ como sendo uma aproximação de $\int_a^b f(x)dx$. Se $P(x)$ for do primeiro grau, isto é, se for a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então temos a Regra dos Trapézios.



Na figura, temos um trapézio "deitado" de altura medindo $h = b - a$ e bases medindo $f(a)$ e $f(b)$. Logo, sua área é dada por $\frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$. Essa será a aproximação que usaremos para o valor de $\int_a^b f(x)dx$, ou seja,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b)).}$$

Pode-se mostrar que o erro absoluto dessa aproximação é $\varepsilon = \left|\frac{h^3}{12}f''(c)\right|$ para algum $c \in [a, b]$. Quanto maior o valor de n, mais próximo de zero será o valor de h e menor será o erro absoluto.

Exemplo 5.1 *Usando a regra dos trapézios, vamos calcular* $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1+x}dx$ *e comparar o resultado obtido com o valor exato da integral.*

Solução: Temos $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $h = b - a = \frac{1}{2}$ e $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Portanto, pela regra dos trapézios,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{4}(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{7}{24} = 0,291667.$$

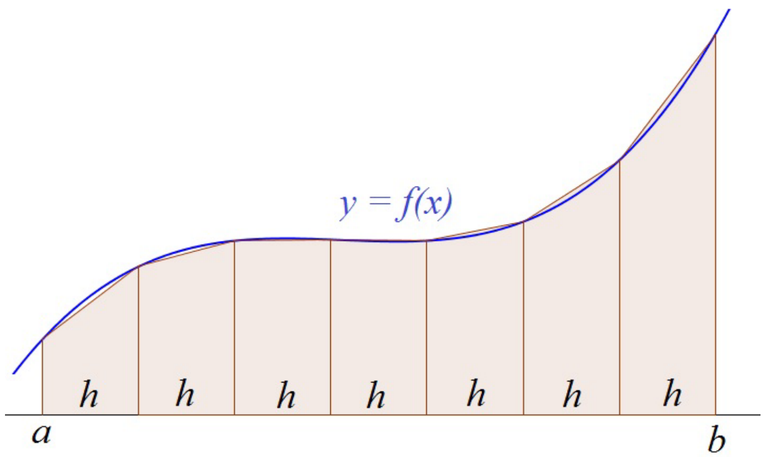
O valor exato dessa integral é

$$\ln(1 + x)|_{\frac{1}{2}}^1 = \ln(2) - \ln(3/2) = \ln(4/3) = 0,287682.$$

Portanto, o erro absoluto cometido com a utilização da regra dos trapézios é de $|0,287682 - 0,291667| = 0,003985$.

Regra dos Trapézios Composta

Sendo n um inteiro positivo, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n partes de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{n}$.



Sejam $x_j = a + jh$ com $j = 0, 1, \ldots, n$. Temos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b.$$

Seja $y_j = f(x_j)$. Aplicando a regra anterior nos intervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{n-1}, x_n]$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ &\approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \cdots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n).\end{aligned}$$

Obtemos assim a *regra dos trapézios composta* ou *regra dos trapézios repetida com passo h:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)}$$

ou, abreviadamente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n} t_i y_i, \quad \text{onde} \quad t_i = 1, 2, 2, 2, \ldots, 2, 1.$$

Exemplo 5.2 *Calcular* $I = \int_1^2 \sqrt{1 + x^3}\, dx$ *usando a regra dos trapézios com* $n = 6$.

Solução: Considerando $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$, $a = 1$, $b = 2$ e $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6} = 0,16667$, e calculando $x_i = a + ih$ e $y_i = f(x_i)$, temos os seguintes resultados:

i	x_i	y_i	t_i
0	1,00000	1,41421	1
1	1,16667	1,60871	2
2	1,33333	1,83586	2
3	1,50000	2,09165	2
4	1,66667	2,37268	2
5	1,83333	2,67620	2
6	2,00000	3,00000	1

Aplicando a fórmula da regra dos trapézios composta:

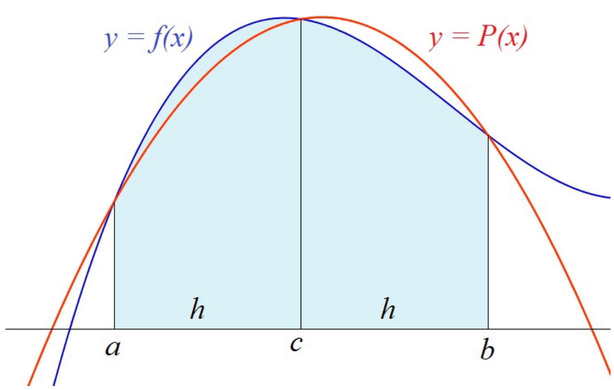
$$I \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n}(y_i t_i) = 2,13206,$$

que é o valor aproximado da integral dada.

Usando-se uma outra técnica mais sofisticada é possível se mostrar que um valor melhor aproximado dessa integral, com todos os algarismos corretos, é igual a $2,129861$.

5.3 Regra de Simpson

Seja $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e $c = \frac{a+b}{2}$ o ponto médio desse intervalo. A regra de Simpson* para o cálculo de $\int_a^b f(x)dx$ consiste em aproximar essa integral por $\int_a^b P(x)dx$, onde $P(x)$ é o polinômio de interpolação quadrática de f nos pontos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ e $(c, f(c))$.



Usando a fórmula de interpolação de Lagrange, temos que

$$P(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

*Thomas Simpson, 1710-1761, matemático inglês

Seja $h = \frac{b-a}{2}$. Então, $c = a + h$ e $b = a + 2h$. Logo,

$$P(x) = \frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{2h^2} f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2h^2} f(b) + \frac{(x-a)(x-a-2h)}{(-h^2)} f(c).$$

Calculando a integral de $P(x)$ no intervalo $[a, b] = [a, a+2h]$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_a^{a+2h} P(x)dx = f(a) &\int_a^{a+2h} \frac{x^2 - 2ax - 3hx + a^2 + 3ah + 2h^2}{2h^2} dx \\ + f(b) &\int_a^{a+2h} \frac{x^2 - 2ax - hx + a^2 + ah}{2h^2} dx \\ + f(c) &\int_a^{a+2h} \frac{x^2 + 2ax + 2hx - a^2 - 2ah}{(-h^2)} dx.\end{aligned}$$

Calculando todas as integrais definidas indicadas e simplificando, obtemos:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]}$$

Pode-se mostrar que o erro absoluto dessa aproximação é $\varepsilon = \left|\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)\right|$ para algum $c \in [a,\ b]$. Quanto maior o n, menores serão o h e o erro absoluto da aproximação da integral.

Exemplo 5.3 *Calcular novamente a integral do Exemplo 5.2, usando a fórmula anterior.*
Solução: *Temos que $f(x) = \sqrt{1+x^3}$, $a = 1$, $b = 2$ e $h = (b-a)/2 = 1/2$. Portanto,*

$$I \approx \frac{h}{3}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] = \frac{0,5}{3}[f(1) + 4f(1,5) + f(2)] = 2,13016.$$

Dessa forma, observamos que é um valor muito próximo do que foi encontrado no Exemplo 5.2.

Observação: Apesar de trabalhoso, é possível se mostrar que

$$f^{(4)}(x) = -\frac{45x^2}{(1+x^3)^{3/2}} + \frac{243x^5}{2(1+x^3)^{5/2}} - \frac{1215x^8}{16(1+x^3)^{7/2}}$$

e que $|f^{(4)}(c)| \leq \frac{3}{2}$ se $c \in [1,\ 2]$. Daí, o erro ϵ da aproximação desse exemplo é tal que

$$\epsilon \leq \frac{h^5}{90} \cdot |f^{(4)}(c)| \leq \frac{(0,5)^5}{90} \cdot \frac{3}{2} \leq 5,21 \cdot 10^{-4}.$$

Exemplo 5.4 *A elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $0 < b < a$ pode ser parametrizada por $x(t) = a \operatorname{sen} t$, $y(t) = b \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Calcule o comprimento dessa elipse usando a regra de Simpson sabendo que esse comprimento é dado por $C = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.*

Solução: Derivando $x(t)$ e $y(t)$ com relação a t, obtemos $x'(t) = a\cos t$ e $y'(t) = -b\,\text{sen}\,t$. Logo, o comprimento da elipse é dado por

$$C = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\,\text{sen}^2\,t}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1-\text{sen}^2\,t) + b^2\,\text{sen}^2\,t}\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\left[1 - \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\text{sen}^2\,t\right]}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1-k^2\,\text{sen}^2\,t)}\,dt,$$

onde $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$. Daí, $C = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\,t}\,dt$. Usando a regra de Simpson com $f(t) = \sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\,t}$ e $h = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{2} = \frac{\pi}{4}$ temos que $C \approx 4a\cdot\frac{h}{3}\left(f(0) + 4f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{2})\right)$ e, portanto, o comprimento da elipse é dado por

$$C \approx \frac{a\pi}{3}\left(1 + 4\sqrt{1-k^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \sqrt{1-k^2}\right) = \frac{a\pi}{3}\left(1 + \sqrt{16\left(1-\frac{k^2}{2}\right)} + \sqrt{1-k^2}\right),$$

ou seja,

$$C \approx \frac{a\pi}{3}\left(1 + \sqrt{8(2-k^2)} + \sqrt{1-k^2}\right),$$

onde $k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

Não há como obter uma resposta exata para o comprimento da elipse, usando-se apenas as funções elementares.

Regra de Simpson Composta

Vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n partes, sendo n um inteiro positivo par. Por simplicidade, podemos supor partes de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{n}$.

Sejam $x_j = a + jh$ e $y_j = f(x_j)$ com $j = 0, 1, \cdots, n$. Temos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b.$$

Aplicando a fórmula anterior nos intervalos $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \cdots [x_{n-2}, x_n]$, obtemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Obtemos assim a *regra de Simpson composta* de passo h, com n pontos:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)}$$

ou, abreviadamente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n} c_i y_i, \quad \text{onde} \quad c_i = 1, 4, 2, 4, 2, \cdots, 4, 2, 4, 1.$$

Denotando por I_n o valor de $I = \int_a^b f(x)dx$ calculado pela regra de Simpson com n pontos, é possível se mostrar que uma estimativa para o erro absoluto da aproximação de I por I_n é dado por $\varepsilon = \dfrac{|I_n - I_{\frac{n}{2}}|}{15}$, se n for um inteiro múltiplo de 4.

Exemplo 5.5 *Usando a regra de Simpson composta com $n = 8$, calcule $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$.*

Solução: Sejam $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$ e $[a, b] = [0, 1]$. Temos que $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{8} = 0,125$. Construímos dessa forma a seguinte tabela:

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	c_i
0	0,000	4,000000	1
1	0,125	3,938461	4
2	0,250	3,764705	2
3	0,375	3,506849	4
4	0,500	3,200000	2
5	0,625	2,876400	4
6	0,750	2,560000	2
7	0,875	2,265486	4
8	1,000	2,000000	1

Observe que $x_0 = a$ e $x_n = x_8 = b$.

$$I \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n}(c_i y_i) = \frac{0,125}{3}(1 \times 4,000000 + 4 \times 3,938461 + 2 \times 3,764705 + 4 \times 3,506849$$
$$+ 2 \times 3,200000 + 4 \times 2,876400 + 2 \times 2,560000 + 4 \times 2,265486 + 1 \times 2,000000) = 3,141592.$$

Note que o valor exato dessa integral é $I = 4\,\text{arctg}(x)|_0^1 = 4(\text{arctg}\,1 - \text{arctg}\,0) = 4(\frac{\pi}{4} - 0) = \pi$.

Exemplo 5.6 *Calcule $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ usando a regra de Simpson composta com $n = 8$, depois com $n = 4$, e obtenha uma estimativa para o erro da aproximação.*

Solução: Sejam $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ e $[a, b] = [0, 2]$. Se $n = 8$, então $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{8} = 0,25$ e, se $n = 4$, então $H = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = 0,5$. Construímos dessa forma a seguinte tabela de valores:

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	c_i	k_j
0	0,00	0,50000000	1	1
1	0,25	0,48477181	4	$---$
2	0,50	0,44340944	2	4
3	0,75	0,38619484	4	$---$
4	1,00	0,32402714	2	2
5	1,25	0,26477107	4	$---$
6	1,50	0,21254802	2	4
7	1,75	0,16868024	4	$---$
8	2,00	0,13290111	1	1

Portanto, a aproximação para I fornecida pela aplicação da regra de Simpson com 8 pontos é

$$I_8 = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{8}(c_i y_i) = \frac{0,25}{3}(1 \times 0,50000000 + 4 \times 0,48477181 + 2 \times 0,44340944 + 4 \times 0,38619484 + 2 \times 0,32402714 + 4 \times 0,26477107 + 2 \times 0,21254802 + 4 \times 0,16868024 + 1 \times 0,13290111) = 0,65087853,$$

enquanto que a aproximação fornecida pela regra de Simpson com 4 pontos é

$$I_4 = \frac{H}{3}\sum_{j=0}^{4}(k_j y_j) = \frac{0,5}{3}(1 \times 0,50000000 + 4 \times 0,44340944 + 2 \times 0,32402714 + 4 \times 0,21254802 + 1 \times 0,13290111) = 0,65079753.$$

Concluímos a partir daí que uma estimativa para o erro no cálculo de I_8 é $\varepsilon = \left|\frac{I_8 - I_4}{15}\right| = 5,398 \times 10^{-6}$.

Exemplo 5.7 *Calcular uma aproximação para*

$$I = \int_1^2 \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2}\, dx$$

usando a regra de Simpson composta com $n = 8$ e com $n = 16$. Obter uma estimativa para o erro da aproximação.

Sejam $a = 1,\ b = 2,\ n = 16,\ h = \frac{b-a}{n} = 0,0625$ e $f(x) = \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}$.

i	x_i	y_i	c_i	k_j
0	1,0000	0,33333 33333	1	1
1	1,0625	0,37833 58591	4	–
2	1,1250	0,40256 11035	2	4
3	1,1875	0,40814 79425	4	–
4	1,2500	0,39870 42021	2	2
5	1,3125	0,37837 81931	4	–
6	1,3750	0,35112 32117	2	4
7	1,4375	0,32026 10126	4	–
8	1,5000	0,28831 86842	2	2
9	1,5625	0,25705 28774	4	–
10	1,6250	0,22757 15011	2	4
11	1,6875	0,20048 62419	4	–
12	1,7500	0,17605 70331	2	2
13	1,8125	0,15431 12599	4	–
14	1,8750	0,13513 38540	2	4
15	1,9375	0,11833 11085	4	–
16	2,0000	0,10367 34694	1	1

Logo, o valor aproximado quando $n = 16$ é:

$$I_{16} = \frac{0,0625}{3}\sum_{i=0}^{16}(c_i y_i) = 0,2761909159.$$

Quando $n = 8$, temos $h = 0,125$ e o valor aproximado da integral é:

$$I_8 = \frac{0,125}{3}\sum_{j=0}^{8}(k_j y_j) = 0,2761968884.$$

Portanto, a estimativa de erro no cálculo de I_{16} é dado por $\epsilon = \left|\frac{I_{16}-I_8}{15}\right| = 0,0000003982$.

5.4 Regra de Gauss

Diversas regras de quadratura podem ser obtidas ao se aproximar a integral $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ por um somatório do tipo $A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \cdots + A_n f(x_n)$ onde o valor de n é previamente escolhido. Surpreendentemente, essas regras podem levar a bons resultados mesmo com valores pequenos de n. Tudo depende da escolha que se venha a fazer para os A_i e para os x_i. Para permitir que esses valores de A_i e x_i possam ser calculados, condições adicionais são dadas.

Consideremos uma função $f(x)$ definida em um intervalo $[-1, 1]$ e n um inteiro positivo. A *regra de Gauss*[†] ou *regra de Gauss-Legendre* para o cálculo de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, consiste em escrever

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \cdots + A_n f(x_n) \tag{5.1}$$

onde $A_1, \cdots A_n, x_1, \cdots x_n$ são constantes e de tal forma que essa fórmula seja exata (erro nulo) quando $f(x)$ for um polinômio de grau no máximo igual a $2n - 1$.

5.4.1 Caso particular simples da regra de Gauss

Consideremos, inicialmente, o caso particular em que $[a, b] = [-1, 1]$ e $n = 2$. Assim, vamos determinar as constantes A_1, A_2, x_1, x_2 de tal forma que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

seja exata quando $f(x)$ for polinomial de grau no maximo $2n - 1 = 3$, ou seja, quando $f(x)$ for um polinômio de grau $0, 1, 2$ ou 3.

No caso particular em que $f(x) = 1$ (polinômio de grau 0) a fórmula deve ser exata, logo, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} 1dx = A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 1 \Rightarrow A_1 + A_2 = 2$. Além disso, quando $f(x) = x$ (polinômio de grau 1), devemos ter que $\int_{-1}^{1} xdx = 0 = A_1x_1 + A_2x_2$; quando $f(x) = x^2$, devemos ter $\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = A_1x_1^2 + A_2x_2^2$ e quando $f(x) = x^3$, devemos ter $\int_{-1}^{1} x^3dx = 0 = A_1x_1^3 + A_2x_2^3$.

Obtemos dessa forma o seguinte sistema não-linear:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 &= 2 \\ A_1x_1 + A_2x_2 &= 0 \\ A_1x_1^2 + A_1x_2^2 &= \frac{2}{3} \\ A_1x_1^3 + A_2x_3^3 &= 0 \end{cases}$$

Se pudéssemos ter $A_1 = 0$ como uma possível solução, então, substituindo na primeira e segunda equações, obteríamos $A_2 = 2$ e $x_2 = 0$. Substituindo tudo isso na terceira equação, obteríamos $0 = \frac{2}{3}$, o que é um absurdo. Concluímos assim que $A_1 = 0$ não pode ser solução, ou seja, que $A_1 \neq 0$. De modo análogo, podemos concluir também que $A_2 \neq 0$.

Se tivéssemos $x_1 = 0$ como solução, então, ao substituirmos na segunda equação obteríamos $A_2x_2 = 0$. Como $A_2 \neq 0$, deveríamos ter $x_2 = 0$. Substituindo tudo na segunda equação obteríamos $0 = \frac{2}{3}$, um absurdo. Logo, $x_1 \neq 0$. Analogamente, temos também $x_2 \neq 0$.

Multiplicando a segunda equação por x_1^2, obtemos $A_1x_1^3 + A_2x_2x_1^2 = 0$. Subtraindo dessa equação a quarta equação do sistema, obtemos $A_2x_2(x_2^2 - x_1^2) = 0 \Rightarrow x_2^2 - x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$. Não podemos ter $x_1 = x_2$, porque se isso fosse sustituído na segunda equação forneceria $A_1 + A_2 = 0$ o que contraria o fato de que $A_1 + A_2 = 2$. Logo, $x_1 = -x_2$. Substituindo na terceira equação e usando

[†] também conhecida como *quadratura gaussiana*

a primeira equação, obtemos $\frac{2}{3} = A_1x_1^2 + A_2x_1^2 = (A_1 + A_2)x_1^2 = 2x_1^2$, ou seja, $x_1^2 = \frac{1}{3}$. Concluímos então que $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Suponhamos $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Então, $x_2 = -x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e substituindo na segunda equação, obtemos $A_1 = A_2$ que substituído na primeira equação fornece $A_1 = A_2 = 1$. Se $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ obteríamos algo equivalente.

Assim, a solução do sistema é $x_1 = -x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $A_1 = A_2 = 1$ e, portanto, a regra de Gauss quando $[a, b] = [-1, 1]$ e $n = 2$ se reduz a

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

ou, usando uma notação decimal com 10 casas decimais

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(0,5773502692) + f(-0,5773502692).$$

Exemplo 5.8 *Vamos calcular* $\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}dx$ *usando a regra que acabamos de obter.*

Solução: *Neste caso,* $f(x) = \sqrt{2-x^2}$*, logo,* $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(0,57735) + f(-0,57735) = 2,5820$.

Para comparação, o valor exato dessa integral é $\frac{\pi}{2} + 1 = 2,5708$.

5.4.2 Mudança de variável

Quando o intervalo de integração $[a, b]$ não for igual a $[-1, 1]$, então uma fazemos uma simples mudança de variável

$$x = \frac{(b-a)t + b + a}{2}$$

e obtemos uma nova integral definida no intervalo $[-1, 1]$ cujo valor coincide com o da integral dada:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt.$$

Note que, neste caso, deve ser usado que $dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)dt$.

5.4.3 Polinômios de Legendre

Nesta seção, precisamos de alguns resultados básicos envolvendo os *polinômios de Legendre*[‡] que são definidos como sendo os polinômios da forma

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

[‡]Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francês

Esses notáveis polinômios ocorrem em várias aplicações nas áreas mais diversas como Equações Diferenciais, Eletromagnetismo, entre outras.

Escolhendo um valor para n, expandindo a enésima potência de (x^2-1) e calculando a derivada enésima, podemos escrever o polinômio em um formato mais familiar. Por exemplo,

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}[(x^2-1)^3] = \frac{1}{48}\frac{d^3}{dx^3}(x^6-3x^4+3x^2-1) \\ &= \frac{1}{48}(120x^3-72x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x). \end{aligned}$$

Os seis primeiros polinômios de Legendre são

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x). \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.4.4 Caso geral da regra de Gauss

Na fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \cdots + A_n f(x_n)$$

os coeficientes A_i são chamados *pesos* e os x_i são chamados *abscissas.* Escolhido o valor de n, podemos obter os pesos e as abscissas dessa regra.

Para isso, substituímos sucessivamente $f(x)$ por 1, x, x^2, $\cdots x^{2n-1}$ na fórmula anterior e obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \cdots + A_n & = & 2 \\ A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_1x_1^{2n-2} + A_2x_2^{2n-2} + \cdots + A_nx_n^{2n-2} & = & \frac{2}{2n-1} \\ A_1x_1^{2n-1} + A_2x_2^{2n-1} + \cdots + A_nx_n^{2n-1} & = & 0 \end{cases}$$

O sistema não-linear de $2n$ equações e $2n$ variáveis anterior é de difícil solução. Mas é possível mostrar que $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são as raízes do polinômio de Legendre $P_n(x)$ e que

$$A_i = \frac{2(1-x_i^2)}{n^2[P_{n-1}(x_i)]^2}$$

Aqui, apresentamos essa fórmula sem demonstração, somente a título de informação adicional.

Exemplo 5.9 *Obter os pesos e abscissas da regra de Gauss quando $n = 3$.*

Solução: O polinômio de Legendre de grau 3 é $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{x}{2}(5x^2 - 3)$, cujas raízes são $x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ e $x_3 = 0$. Substituindo esses valores nas três primeiras equações do sistema 5.4.4, obtemos:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 & = & 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}A_3 & = & 0 \\ \frac{3}{5}A_1 + \frac{3}{5}A_3 & = & \frac{2}{3} \end{cases}$$

cuja solução é $A_1 = A_2 = \frac{5}{9}$, $A_3 = \frac{8}{9}$.

Portanto,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Na hora de efetuar os cálculos, é conveniente usar que $\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,77459\ 66692$.

Exemplo 5.10 *Use a regra de Gauss com $n = 3$ para calcular um valor aproximado para a integral $\int_2^3 \frac{x}{1+x^4}dx$.*

Solução: *Como o intervalo de integração $[a,b] = [2,3]$ é diferente de $[-1,1]$, precisamos fazer uma mudança de variável $x = \frac{(b-a)t+b+a}{2}$ que, neste caso, é $x = \frac{t+5}{2}$.*

Temos:

$$I = \int_2^3 \frac{x}{1+x^4}dx = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{t+5}{2}}{1+\left(\frac{t+5}{2}\right)^4}\frac{1}{2}dt = \int_{-1}^{1} g(t)dt$$

onde $g(t) = \frac{\frac{t+5}{2}}{2\left(1+\left(\frac{t+5}{2}\right)^4\right)}$.

Logo, $I \approx \frac{5}{9}g(-0,7745966692) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g(0,7745966692) = 0,0671599452$.

Neste caso, como a primitiva é igual a $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)$, *concluímos que o valor exato da integral é igual a* $\dfrac{\operatorname{arctg}(9) - \operatorname{arctg}(4)}{2} = 0,0671607210$.

5.4.5 Tabela de pesos e abscissas da regra de Gauss

A tabela a seguir foi construída determinando-se as raízes x_i dos polinômios de Legendre de grau n, para $n \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$. Os pesos A_i foram calculados usando-se a fórmula $A_i = \frac{2(1-x_i^2)}{n^2[P_{n-1}(x_i)]^2}$.

n	abscissas	pesos
2	$x_1 = -x_2 = 0,5773502692$	$A_1 = A_2 = 1$
3	$x_1 = -x_2 = 0,7745966692$	$A_1 = A_2 = 0,5555555556$
	$x_3 = 0$	$A_3 = 0,8888888889$
4	$x_1 = -x_2 = 0,8611363116$	$A_1 = A_2 = 0,3478548451$
	$x_3 = -x_4 = 0,3399810436$	$A_3 = A_4 = 0,6521451549$
5	$x_1 = -x_2 = 0,9061798459$	$A_1 = A_2 = 0,2369268851$
	$x_3 = -x_4 = 0,5384693101$	$A_3 = A_4 = 0,4786286705$
	$x_5 = 0$	$A_5 = 0,5688888889$
6	$x_1 = -x_2 = 0,9324695142$	$A_1 = A_2 = 0,1713244924$
	$x_3 = -x_4 = 0,6612093865$	$A_3 = A_4 = 0,3607615730$
	$x_5 = -x_6 = 0,2386191861$	$A_5 = A_6 = 0,4679139346$
7	$x_1 = -x_2 = 0,9491079123$	$A_1 = A_2 = 0,1294849662$
	$x_3 = -x_4 = 0,7415311855$	$A_3 = A_4 = 0,2797053915$
	$x_5 = -x_6 = 0,4058451513$	$A_5 = A_6 = 0,3818300505$
	$x_7 = 0$	$A_7 = 0,4179591837$
8	$x_1 = -x_2 = 0,9602898565$	$A_1 = A_2 = 0,1012285363$
	$x_3 = -x_4 = 0,7966664774$	$A_3 = A_4 = 0,2223810345$
	$x_5 = -x_6 = 0,5255324099$	$A_5 = A_6 = 0,3137066459$
	$x_7 = -x_8 = 0,1834346425$	$A_7 = A_8 = 0,3626837838$

Note que cada peso associado a abscissa não nula aparece repetido: uma vez associado a uma abscissa positiva e outra vez associado a uma abscissa negativa. Os valores de x_i podem ser permutados, desde que se faça a mesma permutação com os respectivos A_i.

Exemplo 5.11 *Usando a regra de Gauss com $n = 4$, calcule uma aproximação para*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2} dx = \ln 3 \approx 1,09861\ 2289.$$

Solução: Da tabela, temos: $x_1 = -x_2 = 0,8611363116$, $A_1 = A_2 = 0,3478548451$, $x_3 = -x_4 = 0,3399810436$, $A_3 = A_4 = 0,6521451549$. Sendo $f(x) = \frac{1}{x+2}$, temos

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + A_4 f(x_4) = 1,098570354.$$

Exemplo 5.12 *Calcule $I = \displaystyle\int_{2}^{5} \frac{\cos(x)}{1+x^4} dx$ usando a regra de Gauss com $n = 4$.*

Solução: O intervalo de integração é $[a, b] = [2, 5] \neq [-1, 1]$. Fazendo a mudança de variável:

$x = \dfrac{(b-a)t+b+a}{2}$, obtemos $x = \frac{3t+7}{2} \Rightarrow dx = \frac{3}{2}dt$. Substituindo na integral dada, obtemos:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(\frac{3t+7}{2})}{1+(\frac{3t+7}{2})^4} \cdot \frac{3}{2}dt.$$

Consideremos $F(t) = \dfrac{\frac{3}{2}\cos(\frac{3t+7}{2})}{1+(\frac{3t+7}{2})^4}$ e as abscissas e pesos copiados da tabela anterior:

- Abscissas:* $t_1 = -t_2 = 0,8611363116,\ t_3 = -t_4 = 0,3399810436$
- Pesos: $A_1 = A_2 = 0,3478548451,\ A_3 = A_4 = 0,6521451549$

A aplicação† da regra de Gauss com $n = 4$ fornece a seguinte aproximação para a integral:

$$I \approx A_1F(t_1) + A_2F(t_2) + A_3F(t_3) + A_4F(t_4) = -\mathbf{0,0268}375925.$$

Pode-se fazer um cálculo mais demorado (com um maior valor de n) e, no final, obter $-0,0268074863938$ como uma resposta com melhor precisão numérica.

Exemplo 5.13 *Calcule* $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x(x^{10}+1)}dx$ *usando a regra de Gauss com* $n = 5$.

Solução: O intervalo de integração é $[a,b] = [1,3] \neq [-1,1]$. Logo, devemos fazer uma mudança de variável: $x = \dfrac{(b-a)t+b+a}{2}$, ou seja, $x = \frac{2t+4}{2} = t+2 \Rightarrow dx = dt$. Substituindo em I, obtemos:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(t+2)((t+2)^{10}+1)}dt.$$

Consideremos $F(t) = \dfrac{1}{(t+2)((t+2)^{10}+1)}$ e as abscissas e pesos copiados da tabela anterior:

- Abscissas‡: $x_1 = -x_2 = 0,9061798459$, $x_3 = -x_4 = 0,5384693101,\ x_5 = 0$
- Pesos: $A_1 = A_2 = 0,2369268851$, $A_3 = A_4 = 0,4786286705,\ A_5 = 0,5688888889$

A aplicação§ da regra de Gauss com $n = 5$ é:

$$I \approx A_1F(x_1) + A_2F(x_2) + A_3F(x_3) + A_4F(x_4) + A_5F(x_5) = 0,0702523461.$$

---

*as abscissas também poderiam ser denotadas por $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

†pode-se mostrar que o valor exato dessa integral é $-0,0268074864$.

‡as abscissas também poderiam ser denotadas por $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4$ e t_5.

§pode-se mostrar que o valor exato dessa integral é $\ln 3 - \frac{\ln 5}{5} - \frac{\ln 1181}{10} = 0,0693130245$ e que o erro absoluto do cálculo da integral é de $9,39 \times 10^{-4}$.

Regra de Gauss e subdivisão do intervalo

A precisão numérica da Regra de Gauss pode ser melhorada significativamente se o intervalo de integração for subdividido em intervalos menores.

Por exemplo, se a integral $\int_1^4 \sqrt{x^2+4}dx$ for calculada com a Regra de Gauss com $n = 3$, obtemos $9,751097214335$ como resultado e um erro absoluto de $1,2 \cdot 10^{-5}$. No entanto, se o intervalo $[1, 4]$ for subdividido em 5 partes, obtemos

$$\int_1^4 \sqrt{x^2+4}dx = \int_1^{\frac{8}{5}} \sqrt{x^2+4}dx + \int_{\frac{8}{5}}^{\frac{11}{5}} \sqrt{x^2+4}dx + \int_{\frac{11}{5}}^{\frac{14}{5}} \sqrt{x^2+4}dx + \int_{\frac{14}{5}}^{\frac{17}{5}} \sqrt{x^2+4}dx + \int_{\frac{17}{5}}^{4} \sqrt{x^2+4}dx = 9,751085229875$$

com um erro absoluto de $8,4 \cdot 10^{-9}$. Neste caso, foi usada a regra de Gauss com $n = 3$ em cada um dos cinco intervalos $[1, \frac{8}{5}], \dots, [\frac{17}{5}, 4]$ e, no final, somaram-se todos os resultados.

5.5 Exercícios Propostos

(P44) Usando a regra dos trapézios com $n = 10$ calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{2+x^2}\, dx$. Resp.: $3,052859$

(P45) Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^4+1}\, dx$ usando a regra de Gauss com $n = 4$. Resp.: $2,29116617$

(P46) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} dx$ usando a regra de Gauss com $n = 5$. Resp.: $5,049611017$

(P47) Deduza uma fórmula de integração da forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \omega_1 f\left(-\frac{1}{2}\right) + \omega_2 f(0) + \omega_3 f\left(\frac{1}{2}\right)$$

que calcule a integral de polinômios de grau menor do que ou igual a 2 no intervalo $[-1, 1]$ de forma exata. Use a fórmula obtida para calcular a integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{x/5}\, dx$.

Resp.: $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{4}{3}f(-\frac{1}{2}) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(\frac{1}{2})$; $\int_{-1}^{1} e^{x/5}\, dx \approx 2,01334$

(P48) Calcule $\displaystyle\int_{5}^{7} \ln(\ln(x))dx$ usando a regra de Simpson com $n = 8$ e com $n = 4$ e obtenha uma estimativa para o erro da aproximação. Resp.: $I_8 = 1,158220$, $I_4 = 1,158214$, $\varepsilon = 3,56 \times 10^{-7}$

(P49) a) Calcule a integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4+1}\, dx$ usando a regra de Simpson com $n = 8$;

b) Sabendo que o valor exato dessa integral é $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(3+2\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ calcule o erro absoluto cometido na aproximação do item (a). Resp.: $1,73422740$, $\varepsilon = 2,8142640\times 10^{-4}$

(P50) Usando a regra de Simpson com $n = 10$, calcule o comprimento C da elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{7}=1$ sabendo que ela pode ser parametrizada por $\alpha(t) = (2\cos t, \sqrt{7}\,\mathrm{sen}\, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, e que $C = \int_0^{2\pi}\|\alpha'(t)\|\,dt$. Resp.: $C = 14,665680$

(P51) Um carro percorre uma pista em 84 segundos. A velocidade do carro a cada intervalo de 6 segundos está mostrada na seguinte tabela:

$t(s)$	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
$v(m/s)$	0	20	22	22	24	30	33	34	37	34	35	33	30	18	0

Qual é o comprimento da pista? Resp.: $2252\ m$

(P52) Determine $P_5(x)$, o polinômio de Legendre de grau 5, e todas as suas raízes que são as abscissas da regra de Gauss com $n = 5$. (*Sugestão:* use a definição e fatore o polinômio; use a mudança de variável $x^2 = y$).

Resp.: $P_5(x) = \frac{x}{8}(63x^4-70x^2+15)$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\sqrt{35+2\sqrt{70}}}{3\sqrt{7}}$, $x_3 = -x_2$, $x_4 = \frac{\sqrt{35-2\sqrt{70}}}{3\sqrt{7}}$, $x_5 = -x_4$

(P53) Seja $R = 2$. Usando a regra de Gauss com $n = 5$, calcule $I = \int_{-R}^{R}[f(x) - g(x)]\,dx$, onde $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ e $g(x) = -f(x)$. Note que I corresponde à área de um círculo de raio R.
Resp.: $12,607250$

(P54) Sejam $A_1, A_2, \ldots A_n$ os pesos e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as abscissas da regra de Gauss para o cálculo de integrais. Mostre que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i = 2$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = 0$.

Capítulo 6

Equações Diferenciais

6.1 Definições Básicas

Equação diferencial é uma equação onde aparecem uma função e suas derivadas. Por exemplo, $f'(x) + f(x) = \cos(x)$ e $y'' - 4y' + 5y + 3 = x^3 + 3x$ são exemplos de equações diferenciais.

Uma *solução* (exata) para uma equação diferencial é uma função que torna a equação uma sentença verdadeira para quaisquer valores das variáveis quando a função é substituída na equação. Por exemplo, $y = e^{3x}$ é uma solução da equação $y' - 3y = 0$ porque, ao substituirmos y na equação, obtemos $0 = 0$ após a simplificação.

Uma equação diferencial é denominada *ordinária* se a função envolvida possuir apenas uma variável. Se a função tiver várias variáveis, então a equação chama-se *parcial*.

A *ordem* de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que aparecer na equação. Por exemplo, $y''' - y'' + 5y = x^5 + 2x - 1$ é uma equação diferencial ordinária de terceira ordem.

Um *problema de valor inicial* (PVI) é uma equação diferencial com mais algumas condições iniciais do tipo $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y'(x_0)$, etc. A quantidade de condições iniciais fornecidas depende da ordem da equação.

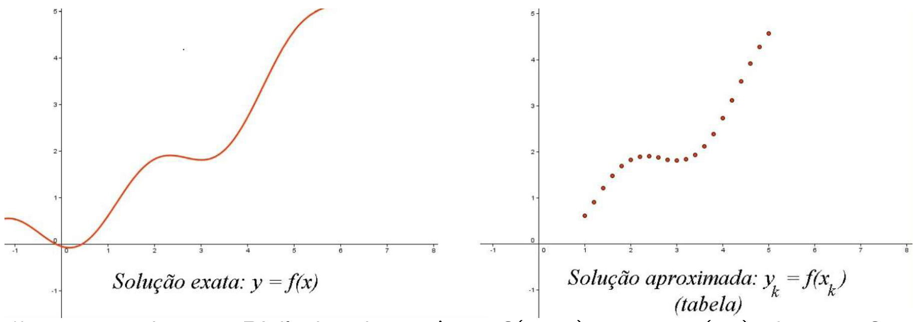
Em geral, a determinação da solução exata de uma equação diferencial envolve o cálculo de uma ou várias primitivas. Por isso, na maioria dos casos, o cálculo da solução exata é difícil ou impossível de ser realizado utilizando-se apenas as conhecidas funções elementares (trigonométricas, logarítmicas, hiperbólicas, polinomiais, etc.). Até mesmo equações de aparência muito simples podem ser impossíveis de se resolver de forma exata. Por exemplo, ninguém consegue determinar a solução exata de $y' = x^2 + y^2$ usando só as funções elementares conhecidas – note que é até difícil imaginar um problema de aparência tão simples!

A resolução de equações diferenciais é um problema importantíssimo porque possui aplicações a diversas áreas do conhecimento tais como Matemática Aplicada, Física, Engenharia e Computação Gráfica.

Devido à impossibilidade de se determinar a solução exata na maioria dos casos, desenvolveram-se técnicas de determinação de solução numérica aproximada da equação.

A resolução numérica aproximada não envolve cálculo de primitivas. Envolve apenas uma sequência de passos onde são usados operações aritméticas básicas e cálculo de valores de funções. Neste caso, não se determina uma função, mas uma tabela de valores de pontos que devem estar muito próximos do gráfico da função que seria a solução da equação.

Neste capítulo, estudaremos apenas um único tipo de PVI: $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$.



Uma solução exata de um PVI do tipo $y' = f(x, y), y_0 = y(x_0)$ é uma função derivável cujo gráfico passa pelo ponto (x_0, y_0). Uma solução aproximada é uma tabela de valores que inicia com (x_0, y_0), próximos do gráfico da função que seria a solução da equação.

6.2 Método de Euler

O método mais simples para se encontrar pontos (x_n, y_n) próximos do gráfico da solução do PVI $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ é o *método de Euler*, elaborado pelo famoso matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

A obtenção da fórmula que define esse método é bem simples e consiste apenas em utilizar a definição de derivada da função $y(x)$ no ponto em que $x = x_n$:

$$y'(x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_n + h) - y(xn)}{h}.$$

Portanto, se h for próximo de 0, temos a aproximação

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h},$$

de onde podemos isolar $y(x_n + h)$ como sendo:

$$y(x_n + h) \approx hy'(x_n) + y(x_n).$$

Lembrando que a equação em estudo é $y' = f(x, y)$, temos que a aproximação citada anteriormente é o mesmo que

$$y(\underbrace{x_n + h}_{x_{n+1}}) \approx hf(x_n, y_n) + \underbrace{y(x_n)}_{y_n}.$$

Observando a aproximação anterior, definimos: $x_{n+1} = x_n + h$, $y_n = y(x_n)$ e $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$.

Dessa forma, a aplicação do método de Euler para o citado PVI, consiste em, a partir do ponto inicial (x_0, y_0) dado, ir calculando vários pontos (x_n, y_n), utilizando as fórmulas $x_{n+1} = x_n + h$ e $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$.

Exemplo 6.1 *Considerando y(x) como sendo a solução do problema de valor inicial* $y' = y+2x-x^2$ $y(0) = 1$, *calcule* $y(0,5)$ *usando o método de Euler com* $h = 0,1$.

Solução:

- São dados que $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0,1$ e $f(x, y) = y + 2x - x^2$. Lembre-se de que neste capítulo todas as equações resolvidas são do tipo $f(x, y) = y'$.

- Usando a fórmula $x_{n+1} = x_n + h$ com $n = 0, 1, 2, \cdots$ obtemos que $x_1 = x_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1$, $x_2 = x_1 + h = 0,1 + 0,1 = 0,2$, $x_3 = x_2 + h = 0,2 + 0,1 = 0,3$, $x_4 = x_3 + h = 0,4$ e $x_5 = x_4 + h = 0,5$. Paramos em x_5 porque no enunciado da questão é perguntado pelo valor de $y(0,5) = y(x_5)$.

- Calculamos agora y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 usando várias vezes a fórmula $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$

- $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot f(0,\ 1) = 1 + 0,1 \cdot (1 + 2 \cdot 0 - 0^2) = 1,100$

- $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1 \cdot f(0,1,\ 1,1) = 1,1 + 0,1 \cdot (1,1 + 2 \cdot 0,1 - 0,1^2) = 1,229$

- $y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1,229 + 0,1 \cdot f(0,2,\ 1,229) = 1,388$

- $y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1,388 + 0,1 \cdot f(0,3,\ 1,388) = 1,578$

- $y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 1,578 + 0,1 \cdot f(0,4,\ 1,578) = 1,799$

Concluímos assim que $y(0,5)$ é aproximadamente igual a $1,799$.

Observações:

- Note que obtivemos cinco pontos (x_k, y_k) com $k = 1, 2, 3, 4, 5$, próximos do gráfico da solução da equação.

- O valor de h deve ser escolhido próximo de 0. Quanto mais próximo de 0, melhor será a precisão dos valores obtidos. No entanto, quanto menor o h, maior o tempo gasto na resolução.

Por uma questão meramente organizacional, os dados obtidos podem ser dispostos em forma de tabela:

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
0	0,0	1,000	1,000
1	0,1	1,100	1,290
2	0,2	1,229	1,589
3	0,3	1,388	1,898
4	0,4	1,578	2,218
5	0,5	1,799	—

A utilidade dos valores da coluna $f(x_n, y_n)$ é só na hora de calcular a linha seguinte. Por isso, a última linha e última coluna pode ficar em branco.

Observação:

- O problema deste exemplo é muito simples e, por causa disso, sua solução exata pode ser calculada usando-se uma técnica conveniente: $y(x) = x^2 + e^x$.

- Usando essa função, podemos calcular os pontos que realmente estão sobre o gráfico da solução: $(x_n, y(x_n))$ com $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e a distância entre cada um desses pontos e os (x_n, y_n) da tabela fornecem os erros nos cálculos de cada ponto.

- Por exemplo, para o ponto aproximado $(x_5, y_5) = (0,5,\ 1,799)$, temos o ponto $(x_5,\ y(x_5)) = (0,5,\ 1,899)$ sobre o gráfico de $y(x)$. O erro cometido é igual à distância entre esses pontos que é $\varepsilon = |1,799 - 1,899| = 0,100$.

6.3 Método de Runge-Kutta

O método mais famoso para resolução numérica de equações diferenciais foi elaborado pelos matemáticos alemães Carl David Runge (1856–1927) e Martin Wilhelm Kutta (1867–1944).


O método elaborado por essa dupla no início do século XX é um método simples e bastante eficiente.

O método de Euler para resolução do PVI $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ consiste na aplicação das fórmulas $x_{n+1} = x_n + h, y_{n+1} = y_n + k_1$, para $n = 0, 1, 2, \cdots$, onde $k_1 = hf(x_n, y_n)$ e h é próximo de 0. O método de Runge-Kutta é um aperfeiçoamento do método de Euler e consiste em somar ao y_n não apenas um valor de k_1, mas uma média de vários valores de $k_1, k_2, k_3, \cdots$

Não vamos apresentar aqui uma demonstração completa do método. Os casos mais simples podem ser encontrados demonstrados em livros como a referência bibliográfica [7].

6.3.1 Método de Runge-Kutta de 2^a ordem (RK2)

Dados $h > 0$ próximo de 0 e um PVI $y' = f(x, y), \ y(x_0) = y_0$, calculam-se para $n = 0, 1, 2, \cdots$ os seguintes valores:

$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + k_2}{2}$$

onde $k_1 = hf(x_n, y_n)$ e $k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$.

Para cada valor inteiro de n, a partir de $n = 0$, calculam-se:

$$x_{n+1} \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow y_{n+1}$$

Repete-se essa sequência de cálculos várias vezes, até chegar no valor de y_n desejado.

6.3.2 Método de Runge-Kutta de 3^a ordem (RK3)

Dados $h > 0$ próximo de 0 e um PVI $y' = f(x, y), \ y(x_0) = y_0$, calculam-se para $n = 0, 1, 2, \cdots$ os seguintes valores:

$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 4k_2 + k_3}{6}$$

onde $k_1 = hf(x_n, y_n), k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$ e $k_3 = hf(x_n + h, y_n - k_1 - 2k_2)$.

Para cada valor inteiro de n, a partir de $n = 0$, calculam-se:

$$x_{n+1} \to k_1 \to k_2 \to k_3 \to y_{n+1}$$

Repete-se essa sequência de cálculos várias vezes, até chegar no valor de y_n desejado.

6.3.3 Método de Runge-Kutta de 4^a ordem (RK4)

Dados $h > 0$ próximo de 0 e um PVI $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, calculam-se para $n = 0, 1, 2, \ldots$ os seguintes valores:

$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

onde $k_1 = hf(x_n, y_n)$, $k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$, $k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$ e $k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$.

Para cada valor inteiro de n, a partir de $n = 0$, calculam-se:

$$x_{n+1} \to k_1 \to k_2 \to k_3 \to k_4 \to y_{n+1}$$

Repete-se essa sequência de cálculos várias vezes, até chegar no valor de y_n desejado.

Exemplo 6.2 *Seja $y(x)$ a solução do PVI $yy' + 2x - y^2 = 0, y(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$. Usando o método de Runge-Kutta de 4^a ordem com $h = 0,1$, calcule $y(1)$.*

Solução: Na equação dada, isolamos o valor de y' e obtemos $f(x, y)$:

$$y' = y - \frac{2x}{y} = f(x, y)$$

A partir de $x_0 = \frac{1}{2} = 0,5$ e $y_0 = \sqrt{2} = 1,4142136$ dados, calculamos x_1, k_1, k_2, k_3, k_4 e y_1:

- $x_1 = x_0 + h = 0,5 + 0,1 = 0,6$
- $k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0,1 \cdot f(0,5,\ 1,4142136) = 0,1 \cdot 0,7071068 = 0,0707107$
- $k_2 = h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = 0,1 \cdot 0,6907226 = 0,0690723$
- $k_3 = h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = 0,1 \cdot 0,6894743 = 0,0689474$
- $k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0,1 \cdot 0,6740782 = 0,067408$
- $y_1 = y_0 + \frac{k_1+2k_2+2k_3+k_4}{6} = 1,4142136 + 0,0690263 = 1,4832399$

A partir desses resultados, calculamos x_2, k_1, k_2, k_3, k_4 e y_2. Depois, calculamos x_3, k_1, k_2, k_3, k_4, y_3, etc. Prosseguimos até obtermos $x_5 = 1$ e o seu respectivo y_5. Paramos aí porque no enunciado é perguntado qual é o valor de $y(1) = y(x_5)$.

Organizamos todos os cálculos realizados em formato de tabela, mostrada a seguir.

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0,5	1,4142136	0,0707107	0,0690723	0,0689474	0,0674078
1	0,6	1,4832399	0,0674200	0,0659967	0,0658853	0,0645389
2	0,7	1,5491938	0,0645498	0,0631983	0,0631982	0,0620077
3	0,8	1,6124522	0,0620174	0,0609058	0,0608153	0,0597528
4	0,9	1,6733209	0,0597616	0,0587656	0,0586831	0,0577272
5	1,0	1,7320519	—	—	—	—

Portanto, $y(1) \approx 1,7320519$. Não há necessidade de calcular os valores de k_1, k_2, k_3 e k_4 da última linha porque esses valores só teriam utilidade se a tabela fosse continuar, calculando-se o y_6.

Observação:

Neste caso, usando-se uma técnica adequada de resolução de equações diferenciais, é possível encontrar a solução exata $y(x) = \sqrt{2x+1}$ do PVI dado

$$y' = y - \frac{2x}{y}, \quad y(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}.$$

Logo, o valor exato de $y(1)$ é $\sqrt{3} = 1,7320508$. Daí, o erro da aproximação encontrada é $\varepsilon = |y_5 - \sqrt{3}| = 1,1 \cdot 10^{-6}$. Isso mostra que o método RK4, como sempre, forneceu um valor bastante preciso.

Exemplo 6.3 *Seja $y(x)$ a solução do seguinte PVI:* $\begin{cases} y + xy' = x^3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

a) Usando o método de Runge-Kutta de 2^a ordem com $h = 0,1$, determine o valor de $y(1,8)$;

b) Sabendo que $y(x) = \dfrac{x^4+3}{4x}$ é a solução exata, calcule o erro absoluto da aproximação do item anterior.

Solução:

a) Isolando-se o valor de y' no problema dado, temos o valor de $f(x,y)$:

$$xy' = x^3 - y \Rightarrow y' = x^2 - \frac{y}{x} = f(x,y).$$

Partindo de $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$ que são dados, usando as fórmulas $k_1 = hf(x_n, y_n)$, $k_2 = hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2)$, $x_{n+1} = x_n + h$ e $y_{n+1} = y_n + \frac{k_1+k_2}{2}$, construímos a seguinte tabela:

n	x_n	y_n	k_1	k_2
0	1,0	1,0000	0,0000	0,0150
1	1,1	1,0075	0,0294	0,0433
2	1,2	1,0438	0,0570	0,0704
3	1,3	1,1076	0,0837	0,0971
4	1,4	1,1980	0,1104	0,1238
5	1,5	1,3151	0,1373	0,1509
6	1,6	1,4593	0,1647	0,1788
7	1,7	1,6311	0,1930	0,2075
8	1,8	1,8314	—	—

Logo, obtivemos que $y(1,8) \approx 1,8314$.

b) Neste problema, o valor exato de $y(1,8)$ é dado por $\frac{1,8^4+3}{4\cdot 1,8} = 1,8746$. Logo, o erro absoluto da aproximação é $\varepsilon = |1,8746 - 1,8314| = 0,0432$.

Observação:

Para aumentar a precisão da resposta (ou seja, para diminuir o valor do erro absoluto), podemos diminuir o valor de h, tomando-o mais próximo de zero. Por exemplo, se tivéssemos usado $h = 0,01$, teríamos obtido $y(1,8) \approx 1,8703$ e um erro de $\varepsilon = 0,0042$, usando o método RK2 (com uma tabela de 81 linhas). Por outro lado, se tivéssemos usado $h = 0,001$, obteríamos $y(1,8) \approx 1,8742$ com um erro de $\varepsilon = 0,0004$ (e uma tabela com 801 linhas).

Sistemas de equações diferenciais

O método de Runge-Kutta pode ser aplicado a *sistemas de equações diferenciais* de primeira ordem. Toda equação diferencial de ordem n é equivalente a um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem.

6.4 Exercícios Propostos

(P55) Usando o método de Euler com $h = 0,2$, determine $y(2,2)$ sabendo que $y(x)$ é solução do PVI:

$$\frac{x}{2} + y' = y^2 + 3, \quad y(1,2) = 1$$

Resp.: 26,8697

(P56) Usando o método de Runge-Kutta de 2^a ordem com $h = 0,1$, determine $y(1,3)$ para o PVI

$$y^2 = y' - x - \frac{3}{25}, \quad y(1) = 2,35$$

Resp.: $6,9092$

(P57) Usando o método de Runge-Kutta de 3^a ordem com $h = 0,15$, determine $y(1,3)$ para o PVI

$$2y = 5y' - x^2 + \frac{7}{50}, \quad y(1) = 4,8$$

Resp.: $5,4591$

(P58) a) Usando o método de Runge-Kutta de 3^a ordem com $h = 0,2$ calcule $y(1)$ sabendo que $y(x)$ é solução de

$$2x + yy' = y^2, \quad y(0) = 1$$

b) Sabendo que a solução exata do PVI do item (a) é $y = \sqrt{2x+1}$, calcule o erro absoluto cometido na aproximação de $y(1)$. Resp.: $y(1) = 1,3863, \quad \varepsilon = 0,3456$

(P59) Considerando o PVI

$$y' - 5y = 3x^2 - 10, \;\; y(3) = 1$$

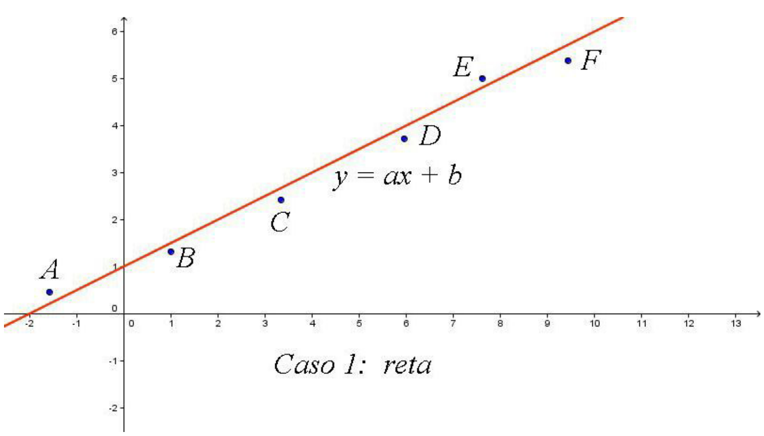
e usando o método de Runge-Kutta de 4^a ordem com $h = 1/4$, calcule $y(4)$. Resp.: $730,8669$

Capítulo 7

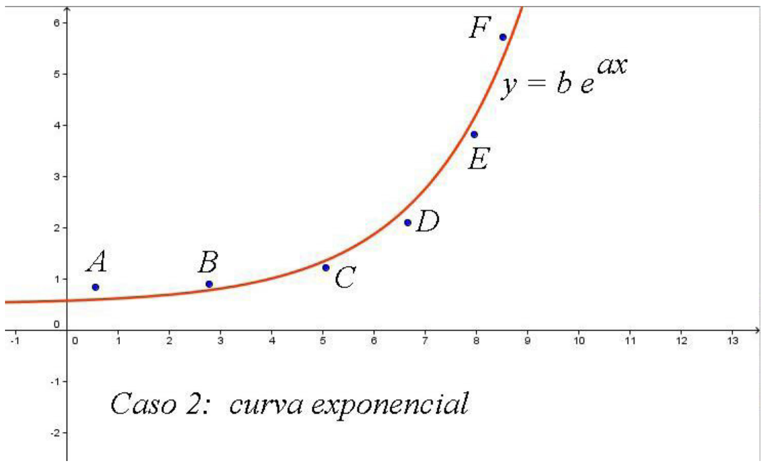
Método dos Mínimos Quadrados

7.1 Introdução

Dado um conjunto de pontos do plano $A, B, C, D, \ldots$ neste capítulo estamos interessados em encontrar a equação de uma curva $y = f(x)$ cujo gráfico passe o mais próximo possível de todos esses pontos. Neste caso, dizemos que a curva se ajusta aos pontos dados. Por exemplo, se os pontos dados forem "quase colineares", podemos querer encontrar a equação da reta $y = ax + b$ que passa perto deles.



Mas, nem sempre os pontos dados podem ser "quase colineares". Às vezes, eles podem sugerir outros formatos como o de curvas exponenciais, parábolas, hipérboles, senóides, etc. Por exemplos, os pontos $A, B, C, \ldots$ da figura a seguir, sugerem um formato de curva exponencial $y = be^{ax}$.



Normalmente, os pontos $A, B, C, \ldots$ são dados em forma de tabela. As fontes desses dados podem ser as mais diversificadas:

- Podem ser provenientes de experiências realizadas em um laboratório de Física (por exemplo, medição de velocidade em função do tempo $v = v_0 + at$);
- Podem ser provenientes de experiências realizadas em um laboratório de Química;
- Podem ser dados referentes ao crescimento da população de uma cidade (crescimento exponencial);
- Podem ser dados referentes ao crescimento do número de computadores conectados à Internet (crescimento exponencial);
- etc.

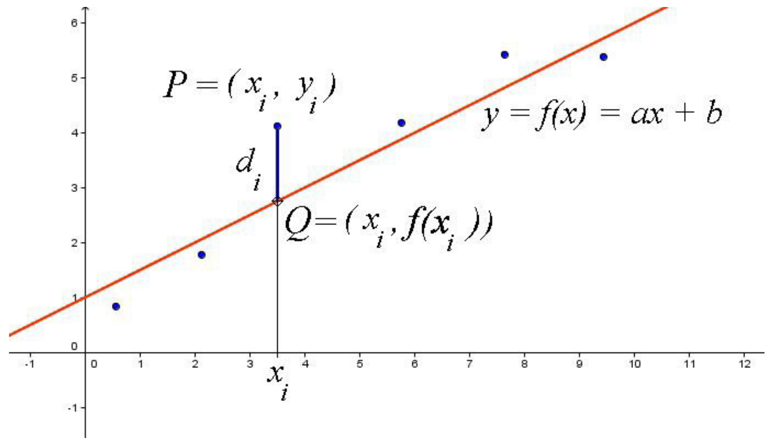
A utilidade de uma equação $y = f(x)$ relacionada aos dados é que se pode, a partir dela, fazer previsões de novos valores que não são fornecidos diretamente.

7.2 Desvio de um ponto com relação a uma curva

Dada a equação de uma curva $y = f(x)$ e um ponto do plano $P = (x_i, y_i)$, definimos o desvio de P com relação ao gráfico de $f(x)$ como sendo

$$d_i = y_i - f(x_i)$$

O d_i assim definido será positivo se $y_i > f(x_i)$, será negativo se $y_i < f(x_i)$ e será nulo se P pertencer ao gráfico. O módulo de d_i corresponde à distância na direção vertical do ponto ao gráfico da função.



7.3 Desvio total

Vamos definir agora uma função D que permita medir o quanto um conjunto de pontos esteja se afastando de uma curva cuja equação é dada.

Dados n pontos (x_i, y_i), definimos o desvio total D desses pontos com relação ao gráfico de $y = f(x)$ como sendo a soma dos quadrados de todos os desvios d_i calculados em cada ponto:

$$D = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2.$$

Observação:

Se não tivessem sido usados os quadrados na definição de desvio total, alguns desvios negativos poderiam cancelar os desvios positivos no cálculo do somatório. Por causa disso, correríamos o risco de ter um desvio total nulo com pontos acima e pontos abaixo do gráfico da função – o que poderia levar à interpretação equivocada de que os pontos pertenceriam ao gráfico.

Exemplo 7.1 *Calcule o desvio total dos pontos*

x_i	1,0	2,0	2,5	3,8	6,0
y_i	-1,0	0,5	2,1	4,5	8,8

com relação à reta de equação y = f (x) = 2x - 3.

Os desvios em cada ponto são dados por:

- $d_1 = y_1 - f(x_1) = -1 - f(1) = -1 - (-1) = 0,$
- $d_2 = y_2 - f(x_2) = 0,5 - f(2) = 0,5 - 1 = -0,5,$
- $d_3 = y_3 - f(x_3) = 2,1 - f(2,5) = 2,1 - 2 = 0,1,$

- $d_4 = y_4 - f(x_4) = 4,5 - f(3,8) = 4,5 - 4,6 = -0,1$,
- $d_5 = y_5 - f(x_5) = 8,8 - f(6) = 8,8 - 9 = -0,2$.

O desvio total é dado por

$$D = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 0 + 0,25 + 0,01 + 0,01 + 0,04 = 0,31.$$

Como o desvio total é próximo de 0, concluímos que a reta dada passa perto dos pontos dados.

7.4 Caso linear

Dados n pontos (x_i, y_i), vamos determinar a e b de tal forma que a reta $y = f(x) = ax + b$ se aproxime do conjunto de pontos o máximo possível.

Neste caso, o desvio total desses pontos com relação a $f(x)$ é

$$D = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

o que mostra que D depende de a e de b.

Para a reta ser próxima dos pontos dados, o desvio total D deve ser mínimo. Como D depende de a e b, então as derivadas $\frac{\partial D}{\partial a}$ e $\frac{\partial D}{\partial b}$ devem ser nulas:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} [2(y_i - ax_i - b)(-x_i)] = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} [2(y_i - ax_i - b)(-1)] = 0$$

As duas igualdades anteriores são equivalentes a

$$2\sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i) = 0$$

$$2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0$$

Dividindo por 2 e separando cada somatório em somatórios menores, obtemos

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i - \sum x_i y_i = 0$$

$$a\sum x_i + \sum b - \sum y_i = 0$$

Usamos $\sum$ significando o mesmo que $\sum_{i=1}^{n}$.

Como $\sum b = \underbrace{b + b + \ + b}_{n \text{ parcelas}} = nb$, temos que a e b são calculados resolvendo-se o sistema linear

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i & = & \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + nb & = & \sum y_i \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema linear anterior, determinamos os valores de a e b:

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

$$b = \frac{\sum y_i - a\sum x_i}{n}.$$

Assim, dados n pontos (x_i, y_i), para encontrar a reta $y = ax + b$ que mais se aproxima deles, procedemos da seguinte forma:

- Calculamos os quatro somatórios $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i^2$ e $\sum x_i y_i$.
- Usamos as fórmulas acima e calculamos os coeficientes a e b da reta.

Este procedimento é denominado *método dos mínimos quadrados.*[*]

Observação:

O somatório $\sum x_i^2$ não deve ser confundido com $(\sum x_i)^2$, nem $\sum x_i y_i$ com $\sum x_i \sum y_i$.

Exemplo 7.2 *Determine a reta $y = ax + b$ que mais se aproxima dos pontos*

x_i	*1,0*	*1,5*	*2,0*	*2,5*	*3,0*
y_i	*2,4*	*4,1*	*4,8*	*6,0*	*6,8*

segundo o método dos mínimos quadrados.

Solução: São 5 os pontos (x_i, y_i) dados na tabela. Logo, $n = 5$. Calculando os quatro somatórios que aparecem nas fórmulas anteriores:

- $\sum x_i = 1,0 + 1,5 + 2,0 + 2,5 + 3,0 = 10,0$
- $\sum x_i^2 = 1,0^2 + 1,5^2 + 2,0^2 + 2,5^2 + 3,0^2 = 22,5$
- $\sum y_i = 2,4 + 4,1 + 4,8 + 6,0 + 6,8 = 24,1$
- $\sum x_i y_i = 1,0 \cdot 2,4 + 1,5 \cdot 4,1 + 2,0 \cdot 4,8 + 2,5 \cdot 6,0 + 3,0 \cdot 6,8 = 53,55$

[*]conhecido na Estatística pelo nome de *regressão linear*

Finalmente, obtemos

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{5 \cdot 53,55 - 10,0 \cdot 24,1}{5 \cdot 22,5 - (10,0)^2} = 2,14$$

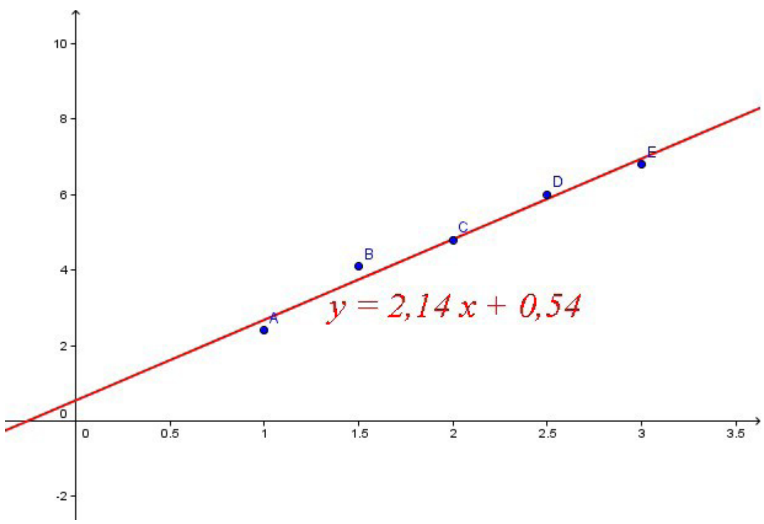
e

$$b = \frac{\sum y_i - a\sum x_i}{n} = \frac{24,1 - 2,14 \cdot 10,0}{5} = 0,54.$$

Dessa forma, a reta que mais se aproxima dos cinco pontos dados é

$$y = 2,14x + 0,54.$$

Abaixo, temos o gráfico da reta encontrada, com todos os pontos dados.



Se calcularmos o desvio total dos pontos dados com relação à reta, obtemos $D = 0,239$.

7.5 Redução ao caso linear

As fórmulas que fornecem os coeficientes da reta dos mínimos quadrados pode ser aplicadas a diversos tipos de outras funções, se for feita antes mudanças de variáveis para transformar as diversas equações na equação de uma reta. Algumas dessas funções são:

- $y = be^{ax}$ (função exponencial de base e)
- $y = ba^x$ (função exponencial com base qualquer)
- $y = bx^a$ (função potencial)
- $y = ax^2 + b$ (função quadrática)
- $y = \frac{1}{ax+b}$ (função racional)

- $y = \sqrt{ax+b}$ (função irracional)
- $y = \frac{c}{1+be^{-ax}}$ (função de crescimento logístico)

Exemplo 7.3 *Determine a curva $y = be^{ax}$ que mais se aproxima dos pontos*

x_i	0,5	1,0	1,5	1,7	2,3
y_i	2,5	3,3	4,3	4,8	6,2

segundo o método dos mínimos quadrados.

Solução: Devemos fazer uma tentativa de mudar as variáveis para transformar a equação dada na equação de uma reta. Se conseguirmos, usamos fórmulas anteriores para calcularmos os valores de a e b.

Em toda equação que apareça alguma exponencial, pode ser uma boa idéia aplicar **logaritmos** aos dois membros da equação para ver o que acontece: $y = be^{ax} \Rightarrow \ln y = \ln(be^{ax}) \Rightarrow \ln y = \ln b + \ln(e^{ax}) \Rightarrow \ln y = \ln b + ax \underbrace{\ln e}_{=1} \Rightarrow \ln y = ax + \ln b$.

Na equação obtida, $\ln y = ax + \ln b$, fazemos as seguintes mudanças de variáveis $Y = \ln y$ e $B = \ln b$ e, com isso, obtemos: $Y = ax + B$ que é a equação de uma reta nas novas variáveis, conforme queríamos.

A variável y está associada aos dados y_i da tabela. Logo, se mudamos o y para $Y = \ln y$, os y_i também devem acompanhar essa mudança, ou seja, devemos aplicar logaritmos a eles. Obtemos dessa forma uma nova tabela, construída a partir da tabela dada:

x_i	0,5	1,0	1,5	1,7	2,3
Y_i	0,9163	1,1939	1,4586	1,5686	1,8245

Observe que nenhuma modificação foi feita nos valores de x_i porque não há mudança de variável envolvendo o x.

Os dados da tabela anterior estão associados à equação da reta $Y = ax + B$. Logo, podemos calcular os coeficientes a e B através de fórmulas já vistas anteriormente. Para isso, precisamos calcular os quatro seguintes somatórios:

- $\sum x_i = 0,5 + 1,0 + 1,5 + 1,7 + 2,3 = 7,0$
- $\sum x_i^2 = 0,5^2 + 1,0^2 + 1,5^2 + 1,7^2 + 2,3^2 = 11,68$
- $\sum x_i Y_i = 0,5 \cdot 0,9163 + 1,0 \cdot 1,1939 + 1,5 \cdot 1,4586 + 1,7 \cdot 1,5686 + 2,3 \cdot 1,8245 = 10,7031$
- $\sum Y_i = 0,9163 + 1,1939 + 1,4586 + 1,5686 + 1,8245 = 6,9620$

A partir daí, podemos calcular a e B usando as conhecidas fórmulas:

- $a = \frac{n\sum x_i Y_i - \sum x_i \sum Y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{5 \cdot 10,7031 - 7,0 \cdot 6,9620}{5 \cdot 11,68 - 7,0^2} = 0,5087$
- $B = \frac{\sum Y_i - a\sum x_i}{n} = \frac{6,9620 - 0,5087 \cdot 7,0}{5} = 0,6803.$

Como $B = \ln b$, temos que $b = e^B = e^{0,6803} = 1,9744$.

Como $a = 0,5087$ e $b = 1,9744$, temos que a curva exponencial que mais se aproxima dos pontos da tabela dada é:

$$y = f(x) = 1,9744e^{0,5087x}.$$

Observação:

Calculando o desvio total $D = \sum (y_i - f(x_i))^2$ com os pontos dados inicialmente e a função $f(x)$ calculada, obtemos $D = 0,0453$, que, sendo próximo de 0, comprova que a curva exponencial obtida realmente passa bem perto de todos pontos dados.

Exemplo 7.4 *Determine a curva $y = bx^a$ que mais se aproxima dos pontos*

x_i	0,5	1,0	4,0	8,0
y_i	2,0	3,0	6,5	8,0

segundo o método dos mínimos quadrados.

Solução: Devemos tentar obter a equação de uma reta a partir de uma mudança de variáveis da equação dada. Para isso, aplicamos logaritmos aos dois membros da equação: $y = bx^a \Rightarrow \ln y = \ln(bx^a) \Rightarrow \ln y = \ln b + \ln(x^a) \Rightarrow \underbrace{\ln y}_{Y} = \underbrace{\ln b}_{B} + a \underbrace{\ln x}_{X} \Rightarrow Y = aX + B$ que é uma equação de reta nas variáveis X e Y, onde $X = \ln x$, $Y = \ln y$ e $B = \ln b$.

Como as mudanças de variáveis envolvem tanto o x, quanto o y, devemos aplicar essas mesmas transformações nos x_i e nos y_i da tabela dada, ou seja, devemos construir uma nova tabela aplicando logaritmo natural a todos os dados iniciais:

$X_i = \ln x_i$	-0,6931	0,0000	1,3863	2,0794
$Y_i = \ln y_i$	0,6931	1,0986	1,8718	2,0794

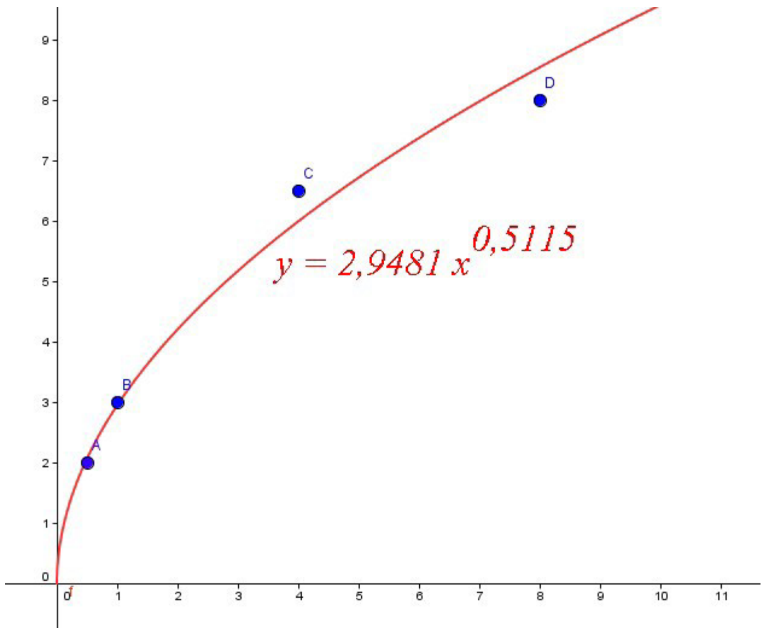
Como essa nova tabela está relacionada com a equação da reta $Y = aX + B$, podemos calcular os valores de a e B usando as fórmulas já conhecidas:

- $n = 4$, $\sum X_i = 2,7726$, $\sum Y_i = 5,7429$, $\sum X_i^2 = 6,7261$, $\sum X_i Y_i = 6,4384$
- $a = \frac{n\sum X_iY_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = 0,5115$
- $B = \frac{\sum Y_i - a\sum X_i}{n} = 1,0812$

Obtivemos assim que $B = 1,0812$ e, como $B = \ln b \Rightarrow b = e^B$, temos que $b = e^{1,0812} = 2,9481$. Portanto, a curva procurada neste caso é

$$y = 2,9481x^{0,5115}.$$

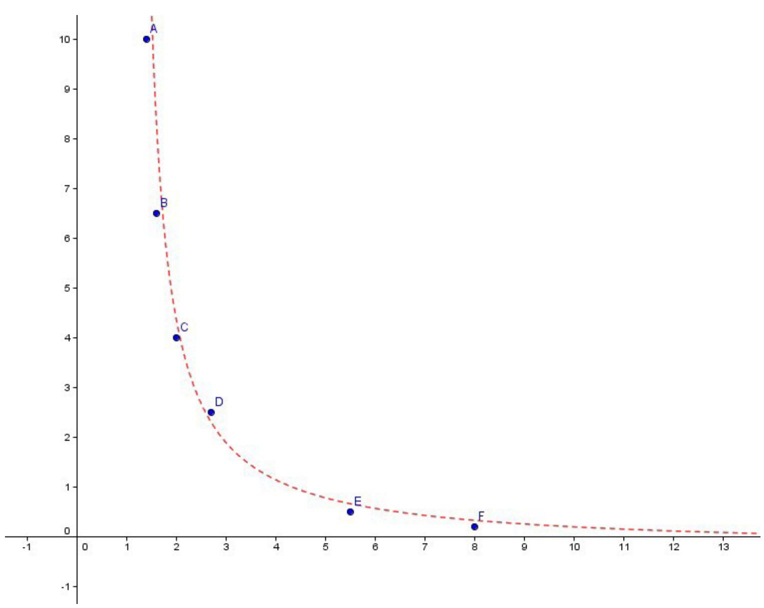
O gráfico da curva encontrada está construído logo a seguir, acompanhado dos 4 pontos dados inicialmente.



Exemplo 7.5 *Usando o método dos mínimos quadrados, determine a equação $y = f(x)$ de uma curva que mais se aproxime dos pontos da tabela:*

x_i	1,4	1,6	2,0	2,7	5,5	8,0
y_i	10,0	6,5	4,0	2,5	0,5	0,2

Solução: Este problema admite uma infinidade de soluções diferentes porque existem infinitos tipos de curvas que se aproximam de um conjunto de pontos dado. Para resolvê-lo, devemos escolher um tipo particular de curva. Para nos orientarmos nessa escolha, podemos, por exemplo, ver que tipo de curva está sendo sugerido pela disposição dos pontos no plano.



Os pontos da tabela parecem estar perto de um ramo de hipérbole $y = \frac{1}{ax+b}$. Então, como uma das possíveis soluções, vamos determinar a e b tais que a curva $y = \frac{1}{ax+b}$ passa o mais próximo possível dos pontos dados.

A primeira coisa a se fazer é descobrir se é possível transformar essa equação na equação de uma reta, através de uma mudança de variável.

Neste caso, isso é possível porque basta inverter os dois membros da equação para obtermos: $\frac{1}{y} = ax + b$. Fazendo $Y = 1/y$, obtemos $Y = ax + b$ que é uma reta nas variáveis x e Y. Aplicando essa transformação nos pontos da tabela dada, obtemos:

x_i	1,4	1,6	2,0	2,7	5,5	8,0
$Y_i = \frac{1}{y_i}$	0,1000	0,1538	0,2500	0,4000	2,0000	5,0000

Usando que $n = 6$ e os pontos (x_i, Y_i) da tabela acima, calculamos os seguintes somatórios: $\sum x_i = 21,2$, $\sum x_i^2 = 110,06$, $\sum Y_i = 7,9038$, $\sum x_i Y_i = 52,9662$.

Substituindo cada um dos somatórios anteriores nas fórmulas

$$a = \frac{n \sum x_i Y_i - \sum x_i \sum Y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

e

$$b = \frac{\sum Y_i - a \sum x_i}{n},$$

obtemos: $a = 0,7123$ e $b = -1,1994$.

Portanto, a equação da hipérbole procurada é

$$y = \frac{1}{0,7123x - 1,1994}.$$

Exemplo 7.6 *Determine a e b de modo que a curva $y = f(x) = a + b \ln x$ se aproxime dos pontos $(x_i,\, y_i)$ da tabela*

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2,98	6,45	8,50	10,00	11,00

e determine o desvio total desses pontos com relação à curva dada.

Solução:

A equação $y = a + b \underbrace{\ln x}_{X}$ pode ser transformada na equação de uma reta se for usada a transformação $X = \ln x$; com isso, a equação transformada é $y = a + bX$.

Aplicando a transformação $X = \ln x$ nos pontos x_i, obtemos a seguinte tabela transformada:

X_i	0,0000	0,6931	1,0986	1,3862	1,6094
y_i	2,98	6,45	8,50	10,00	11,00

A partir daí, calculamos os somatórios $\Sigma X_i = 4,7874$, $\Sigma X_i^2 = 6,1995$, $\Sigma y_i = 38,93$ e $\Sigma X_i y_i = 45,3757$. E, finalmente, obtemos $b = \frac{n\Sigma X_i y_i - \Sigma X_i \Sigma y_i}{n\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2} = 5,0141$ e $a = \frac{\Sigma y_i - b\Sigma X_i}{n} = 2,9849$. Logo, a equação procurada é

$$y = 2,9849 + 5,0141 \ln x$$

Note que os coeficientes a e b da reta estão trocados com relação a outros exemplos anteriores. O desvio total dos pontos é dado por

$$D = \Sigma(y_i - f(x_i))^2 = (2,98 - f(1))^2 + (6,45 - f(2))^2 + (8,50 - f(3))^2 + (10 - f(4))^2 + (11 - f(5))^2 = 0,0072.$$

7.6 Usando a calculadora para calcular a curva dos mínimos quadrados

A maioria das calculadoras científicas atuais, têm implementados as fórmulas para o cálculo de a e b da curva $y = f(x)$ dos mínimos quadrados.

No caso da calculadora CASIO, as teclas que devem ser pressionadas são as seguintes:

- Pressionam-se as teclas $\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ para limpar a memória a ser usada nos cálculos.
- Seleciona-se o tipo de função a ser utilizada. Para isso, pressionam-se as teclas $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{3}$ e uma tecla que corresponde ao número da função selecionada. Alguns tipos são:

  (1) **Lin** - linear $y = a + bx$

  (2) **Log** - logarítmica $y = a + b \ln x$

  (3) **Exp** - exponencial $y = ae^{bx}$

  (1) (depois de pressionar a seta para a direita) **Pwr** - potencial $y = ax^b$

  (2) **Inv** - hipérbole $y = a + b/x$

  (3) **Quad** - quadrática $y = a + bx + cx^2$

- Fornecem-se os pontos separando-se as coordenadas por uma vírgula $\boxed{\,,\,}$ e pressionando-se $\boxed{\text{M+}}$ assim que for digitada a segunda coordenada. A cada ponto fornecido é mostrado o valor de n que é o contador de pontos digitados. Por exemplo:

1	$\boxed{\,,\,}$	7	$\boxed{\text{M+}}$	$n = 1$
4	$\boxed{\,,\,}$	5	$\boxed{\text{M+}}$	$n = 2$
5.3	$\boxed{\,,\,}$	4.8	$\boxed{\text{M+}}$	$n = 3$
-7	$\boxed{\,,\,}$	-3.51	$\boxed{\text{M+}}$	$n = 4$
...	...	...	etc.	

- Após a digitação dos pontos, escolhe-se o que deve ser mostrado pela calculadora. Pressionando-se $\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{1}$ e um número de 1 a 3 pode-se mostrar o valor dos somatórios Σx_i, Σy_i, $\Sigma x_i y_i$, etc.

- Pressionando-se as teclas $\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{2}$, a seta para a direita e um número 1 ou 2, pode-se mostrar o valor de a ou b que aparecem na definição da função escolhida.

Note que o formato da função da calculadora pode ser diferente do formato que usamos nos exemplos e exercícios mostrados anteriormente. Por exemplo, usamos o formato da reta como sendo $y = ax + b$, mas a calculadora usa $y = a + bx$. Portanto, os valores de a e b aparecem trocados no final.

7.7 Exercícios Propostos

(P60) Usando o *método dos mínimos quadrados*, determine a reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos da tabela

x_i	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
y_i	1,00	1,70	2,50	3,00	3,80	4,00	5,15

Resp.: $y = 1,310714x - 0,255357$

(P61) Determine uma função $f(x) = b\, e^{ax}$ que melhor se ajusta aos pontos da tabela

x_i	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
y_i	2,00	3,70	4,50	5,00	7,80	5,50	8,00

Resp.: $y = 1,790153\, e^{0,392982x}$

(P62) a) Determine uma função $y = f(x) = \frac{10}{ax^2+b}$ que melhor se ajusta aos pontos da tabela

x_i	4,00	3,00	2,00	1,00	0,50
y_i	0,75	1,70	2,50	3,00	5,20

b) Calcule o desvio total (isto é, a *soma dos quadrados dos desvios ou resíduos de cada ponto*) dos pontos dados com relação ao gráfico de $f(x)$.

Resp.: $y = \dfrac{10}{0,665492x^2 + 1,668191}$, $D = 1,909843$

(P63) Determine a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ da forma $y = a + \frac{b}{x}$ que melhor se ajusta aos pontos da tabela

x_i	1	2	3	4
y_i	12	7	5	2

e calcule os desvios d_i de cada ponto da tabela com relação a $\mathcal{H}$.

Resp.: $y = 0,153846 + \dfrac{12,184615}{x}$, $(d_i) = (-0,338,\ 0,753,\ 0,784,\ -1,200)$

(P64) Determine a equação de uma curva $y = \dfrac{b}{x^a}$ que melhor se ajusta aos pontos

x_i	5	4	3	2	1
y_i	0,05	0,12	0,25	0,90	7,00

e calcule os desvios d_i de cada ponto da tabela com relação a essa curva.

Resp.: $y = \dfrac{7,155142}{x^{3,028913}}$, $(d_i) = (-0,004,\ 0,0125,\ -0,0067,\ 0,0233,\ -0,1551)$

(P65) Consideremos $y = ax + b$ a reta que mais se aproxima dos n pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ segundo o *método dos mínimos quadrados.* Mostre que essa reta passa pelo ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ onde $\bar{x}$ é a média aritmética dos x_i e $\bar{y}$ é a média aritmética dos y_i, com $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(P66) Determine uma curva do tipo $y = \dfrac{100}{4 + be^{ax}}$ que se aproxime dos pontos

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	24	20	9	1,8	0,4

de acordo com o método dos mínimos quadrados.

Resp.: $y = \frac{100}{4+6,8454e^{1,8536x}}$

(P67) Dados os pontos (x_i, y_i) com $i = 1, 2, \ldots, n$, mostre que se $y = ax^2 + bx + c$ é uma curva tal que $D = \sum(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$ assume um valor mínimo, então (a, b, c) é solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix}.$$

(P68) Determine a equação da parábola $y = ax^2 + bx + c$ que mais se aproxima dos pontos

x_i	-1	0	1	2	3	4
y_i	16,8	3,9	-5	$-9,8$	$-10,5$	-8

de acordo com o método dos mínimos quadrados.
Resp.: $y = 1,9607x^2 - 10,7964x + 3,9642$

(P69) Consideremos um conjunto de n pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\cdots$, $P_n = (x_n, y_n, z_n)$ no espaço tridimensional, a equação de um plano $z = ax + by + c$ e uma *função desvio total* definida por $D(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n}[(ax_i + by_i + c) - z_i]^2$. Mostre que se $D(a, b, c)$ assumir um valor mínimo, então (a, b, c) é solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i z_i \\ \sum y_i z_i \\ \sum z_i \end{bmatrix}.$$

(P70) Dados os pontos $P_1 = (1,\ 2,\ \frac{11}{10})$, $P_2 = (2,\ 1,\ \frac{91}{10})$, $P_3 = (-1,\ -1,\ \frac{99}{10})$, $P_4 = (0,\ 1,\ \frac{29}{10})$, $P_5 = (1,\ 0,\ \frac{111}{10})$, $P_6 = (3,\ 2,\ \frac{69}{10})$, $P_7 = (-2,\ -2,\ 12)$, determine o plano $z = ax + by + c$ que mais se aproxima desses pontos de acordo com o *método dos mínimos quadrados* descrito no exercício anterior. Resp.: $z = 3,02129\,x - 5,01333\,y + 7,99354$

(P71) Uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo $[a, b]$ pode ser aproximada por um polinômio de grau m, $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, usando o método dos mínimos quadrados. Para isso, deve-se minimizar o desvio total que é dado pela seguinte integral:

$$\int_a^b [p(x) - f(x)]^2\,dx = \int_a^b [a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 - f(x)]^2\,dx.$$

As condições necessárias para o valor mínimo dessa integral levam a um sistema linear com $m+1$ equações e $m+1$ variáveis $a_m, \cdots, a_1, a_0$:

$$\int_a^b [a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - f(x)] \cdot x^k\,dx = 0,$$

com $k = 0, 1, 2, \cdots m$. Baseando-se nessas informações, em cada um dos casos a seguir, determine um polinômio $p(x)$ de grau m que aproxima $f(x)$ no intervalo $[0,\ 1]$:

- $f(x) = \text{sen}(\frac{\pi x}{2})$, $m = 3$, Resp.: $p(x) = -0,40x^3 - 0,24x^2 + 1,64x - 0,05$
- $f(x) = \ln(x+4)$, $m = 2$, Resp.: $p(x) = 0,2723x^2 + 0,5003x + 1,3424$
- $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $m = 3$, Resp.: $p(x) = 0,670x^3 - 0,728x^2 - 0,350x + 0,943$

Apêndice A

Derivadas

Neste capítulo, mostramos brevemente como calcular derivadas de forma aproximada.

A.1 Cálculo aproximado de derivadas

De acordo com a definição de derivada de $f(x)$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Portanto, se h for próximo de 0, a razão $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ é próxima de $f'(x)$.

Se $f'(x)$ existir, então

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{2h} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right) = \frac{1}{2}(f'(x) + f'(x)) = f'(x).
\end{aligned}$$

Concluímos a partir daí que $\dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ também é uma aproximação para $f'(x)$ se h for próximo de 0. Pode-se mostrar que essa última aproximação é bem melhor do que a primeira que foi mostrada anteriormente.

A.2 Derivadas de ordem superior

Uma vez definida uma aproximação para $f'(x)$ fica fácil obter aproximações para $f''(x)$, $f'''(x)$, etc. Usando a fórmula anterior várias vezes temos

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \approx \frac{\frac{f((x+h)+h) - f((x+h)-h)}{2h} - \frac{f((x-h)+h) - f((x-h)-h)}{2h}}{2h}$$

de onde obtemos que

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}.$$

A partir de $f'''(x) \approx \frac{f''(x+h) - f''(x-h)}{2h}$ obtemos também que

$$f'''(x) \approx \frac{\frac{f((x+h)+2h) - 2f(x+h) + f((x+h)-2h)}{4h^2} - \frac{f((x-h)+2h) - 2f(x-h) + f((x-h)-2h)}{4h^2}}{2h}$$

que é o mesmo que

$$f'''(x) \approx \frac{f(x+3h) - 3f(x+h) + 3f(x-h) - f(x-3h)}{8h^3}.$$

E assim, de modo análogo, podemos obter outras derivadas de ordem superior.

A.3 Derivadas parciais

Derivadas parciais podem ser calculadas de forma aproximada pelas expressões:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \approx \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \approx \frac{f(x,y+h) - f(x,y-h)}{2h}$$

onde h é um valor constante próximo de zero.

A.4 Exemplos

Exemplo A.1 *Sendo $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$, vamos calcular uma aproximação para $f'(2)$ usando $h = 0,00001$.*

- *Se usarmos a aproximação $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ para $f'(2)$, obtemos $f'(2) \approx 0,94491327482515$*
- *Se usarmos a aproximação $\frac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}$ para $f'(2)$, obtemos $f'(2) \approx 0,94491118252105$*
- *Como $f'(x) = \frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+5}}$, temos que $f'(2) = 0,94491118252307$. Portanto, o valor melhor aproximado é o do item anterior.*

Exemplo A.2 *Seja $f(x) = \frac{x^2 e^x}{(1+x^2)^2}$. Escolhendo $h = 0,0001$ vamos calcular $f'''(a)$ para um valor de a escolhido. Para $a = 1$, obtemos*

$$f'''(1) \approx \frac{f(1+3 \cdot 0,0001) - 3f(1+0,0001) + 3f(1-0,0001) - f(1-3 \cdot 0,0001)}{8 \cdot 0,0001^3} = 0,679581.$$

Neste caso, depois de um certo trabalho, podemos obter a derivada terceira de forma exata:

$$f'''(x) = \frac{x^2e^x}{(1+x^2)^2} + \frac{6xe^x}{(1+x^2)^2} + \frac{6e^x}{(1+x^2)^2} - \frac{12x^3e^x}{(1+x^2)^3} - \frac{60x^2e^x}{(1+x^2)^3} - \frac{48xe^x}{(1+x^2)^3} + \frac{72x^4e^x}{(1+x^2)^4} + \frac{216x^3e^x}{(1+x^2)^4} - \frac{192x^5e^x}{(1+x^2)^5}$$

e, a partir daí, $f'''(1) = 0,679570$.

Exemplo A.3 *Sejam* $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\cos x}$ *e* $h = 10^{-6}$. *Calcule* $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}(5,3)$.

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) \approx \dfrac{f(1+h,2)-f(1-h,2)}{2h} = -2,715588192536$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(5,3) \approx \dfrac{f(5,3+h)-f(5,3-h)}{2h} = 0,136112005888$

Pode-se verificar que cada um desses valores tem pelo menos 9 casas decimais corretas (livres de erro).

A.5 Exercícios Propostos

(P69) Sejam $f(x) = e^{\sqrt{1+x^2}}$ e $h = 0,00001$. Calcule uma aproximação para $f'(4)$.
Resp.: $59,90699730$

(P70) Mostre que se for usada a aproximação $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, então a derivada segunda pode ser aproximada por

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2},$$

e que a derivada terceira por

$$f'''(x) \approx \frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3}.$$

(P71) Sendo $f(x) = \frac{e^x}{x^2+4}$, usando $h = 0,001$ calcule uma aproximação para $f'''(2)$.
Resp.: $0,231082$ (o valor exato é $0,230908$)

(P72) Obtenha aproximações para as derivadas segundas $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ calculadas em (x,y).
Resp.: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \approx \frac{f(x+2h,y)-2f(x,y)+f(x-2h,y)}{4h^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \approx \frac{f(x,y+2h)-2f(x,y)+f(x,y-2h)}{4h^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \approx \frac{f(x+h,y+h)-f(x+h,y-h)-f(x-h,y+h)+f(x-h,y-h)}{4h^2}$

Apêndice B

Sistemas Não Lineares

Neste capítulo, descrevemos e exemplificamos um método simples para resolução de alguns sistemas não lineares.

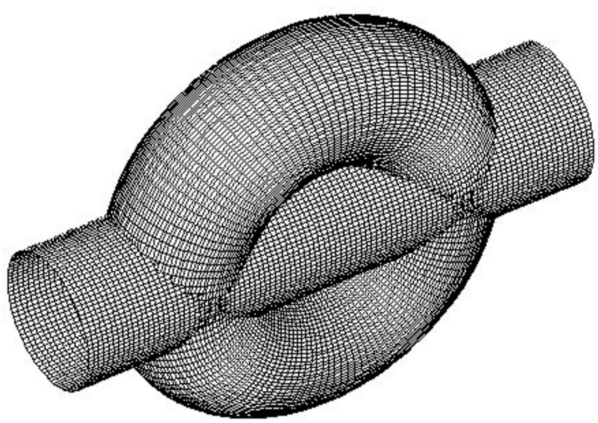
Sistemas não lineares ocorrem sempre que quisermos saber quando dois fenômenos descritos por equações não lineares ocorrem simultaneamente. Consideremos, por exemplo, o toro parametrizado por

$$F(u, v) = ((10 - 5\,\text{sen}(u))\,\text{sen}(v), 5\cos(u), (10 - 5\,\text{sen}(u))\cos(v))$$

e o cilindro

$$G(r, s) = (s, 5\cos(r), 5\,\text{sen}(r))$$

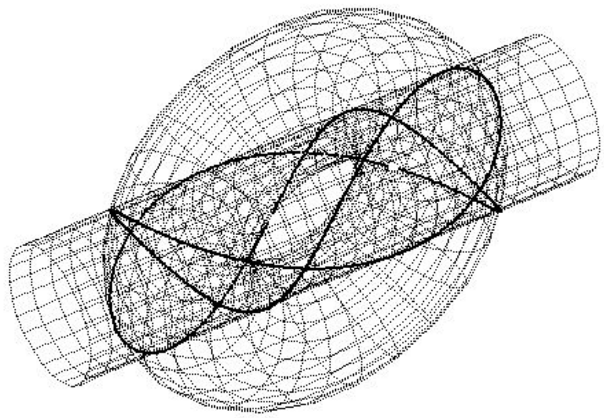
que estão desenhados na seguinte figura:



Sua interseção é uma curva que é solução do seguinte sistema não linear de 3 equações nas variáveis u, v, r, s:

$$\begin{cases} (10 - 5\,\text{sen}(u))\,\text{sen}(v) = s \\ 5\cos(u) = 5\cos(r) \\ (10 - 5\,\text{sen}(u))\cos(v) = 5\,\text{sen}(r) \end{cases}$$

Em geral, é muito difícil ou impossível encontrar a equação de uma curva dessas. O que podemos fazer é calcular numericamente as coordenadas de cada ponto da curva de forma aproximada. É isso que está destacado na figura a seguir:



B.1 Sistemas não lineares

Definição B.1 *Um sistema não linear é um sistema de equações onde pelo menos uma das equações não é de primeiro grau nas suas variáveis.*

Por exemplo, $\begin{cases} 3x+5y=5 \\ 7x-2y=9 \end{cases}$ é um sistema linear, enquanto que $\begin{cases} 3x^2+5y^2=5 \\ 7x-2y^4=9 \end{cases}$ não é linear.

B.2 O método de Newton para sistemas

Consideremos o sistema $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$. Dada uma aproximação inicial da solução (x_0,y_0) e $h,k\in\mathbb{R}$ tais que $x_1=x_0+h$ e $y_1=y_0+k$, temos que o desenvolvimento em série de Taylor em torno de (x_0,y_0) até ordem 1 das equações do sistema fornece $\begin{cases} f(x_0,y_0)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \\ g(x_0,y_0)+h\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \end{cases}$ que pode ser escrito no seguinte formato de equação matricial:

$$\begin{bmatrix} f(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de onde obtemos:

$$\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) & -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) \end{bmatrix},$$

que equivale a

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) & -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) \end{bmatrix}.$$

De modo semelhante podemos obter que

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_1)\frac{\partial g}{\partial y}(x_1,y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1)\frac{\partial g}{\partial x}(x_1,y_1)} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y}(x_1,y_1) & -\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1) \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(x_1,y_1) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1,y_1) \\ g(x_1,y_1) \end{bmatrix}$$

e, em geral,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n)\frac{\partial g}{\partial y}(x_n,y_n) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_n,y_n)\frac{\partial g}{\partial x}(x_n,y_n)} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y}(x_n,y_n) & -\frac{\partial f}{\partial y}(x_n,y_n) \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(x_n,y_n) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_n,y_n) \\ g(x_n,y_n) \end{bmatrix}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

B.2.1 Algoritmo para resolução de sistema 2×2

Consideremos um sistema de equações $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ com aproximação inicial (x_0, y_0) da sua solução e erro igual a ε. Para determinar sua solução, seguimos os seguintes passos:

1) Fazemos $n = 0$

2) Calculamos $A = f(x_n, y_n)$ e $B = g(x_n, y_n)$

3) Calculamos todas as derivadas de ordem 1 no ponto (x_n, y_n), ou seja, calculamos $C = \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n)$, $D = \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)$, $E = \frac{\partial g}{\partial x}(x_n, y_n)$ e $F = \frac{\partial g}{\partial y}(x_n, y_n)$.

4) Calculamos $d = CE - DF$

5) Calculamos $h = \frac{BD - AF}{d}$ e $k = \frac{BC - AE}{d}$

6) Calculamos $x_{n+1} = x_n + h$ e $y_{n+1} = y_n + k$

6) Calculamos $\Delta = \sqrt{h^2 + k^2}$. Se $\Delta < \varepsilon$ encerramos e dizemos que (x_{n+1}, y_{n+1}) é a solução aproximada do sistema; senão, incrementamos o valor de n de 1 unidade e retornamos ao item (2)

B.2.2 Sistemas não lineares 3×3

Para sistemas com um número maior de equações, podemos obter fórmula semelhante à anterior. Por exemplo, para sistemas 3×3 do tipo $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$ temos a seguinte fórmula de resolução:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n, z_n) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n, z_n) & \frac{\partial f}{\partial z}(x_n, y_n, z_n) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_n, y_n, z_n) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_n, y_n, z_n) & \frac{\partial g}{\partial z}(x_n, y_n, z_n) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x_n, y_n, z_n) & \frac{\partial h}{\partial y}(x_n, y_n, z_n) & \frac{\partial h}{\partial z}(x_n, y_n, z_n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x_n, y_n, z_n) \\ g(x_n, y_n, z_n) \\ h(x_n, y_n, z_n) \end{bmatrix},$$

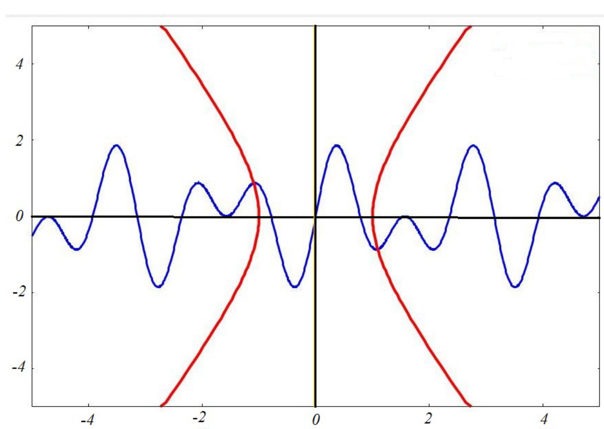
para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ Dado $\varepsilon > 0$, os termos da sequência são calculados até que $\Delta = \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2 + (z_{n+1} - z_n)^2} < \varepsilon$. O último terno (x_n, y_n, z_n) calculado é considerado a solução aproximada do sistema.

B.3 Exemplos

Exemplo B.1 *Vamos determinar a solução do sistema*

$$\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \\ \text{sen}(3x) + \text{sen}(5x) = y \end{cases}$$

Um gráficos das curvas definidas por essas equações está mostrado a seguir:



Como as curvas se encontram duas vezes, o sistema tem duas soluções distintas.

Observando os pontos de encontro das curvas, escolhemos $x_0 = 1,5$ *e* $y_0 = -0,5$ *como sendo aproximação inicial da solução do sistema. A partir dessa aproximação, depois de 6 iterações, obtemos a seguinte solução aproximada do sistema:* $x = 1,090133397$ *e* $y = -0,868080234$.

n	x_n	y_n	h	k	Δ
0	$1,5$	$-0,5$	$-0,397721830$	$0,022661967$	$0,398366940$
1	$1,102278169$	$-0,477338032$	$-0,028156938$	$-0,402149840$	$0,403134354$
2	$1,074121231$	$-0,879487873$	$0,016638427$	$0,008857277$	$0,018849101$
3	$1,090759658$	$-0,870630596$	$-6,26074 \cdot 10^{-4}$	$0,002546589$	$0,002622419$
4	$1,090133584$	$-0,868084006$	$-1,87235 \cdot 10^{-7}$	$3,77275 \cdot 10^{-6}$	$3,77739 \cdot 10^{-6}$
5	$1,090133397$	$-0,868080234$	$1,43586 \cdot 10^{-12}$	$9,04278 \cdot 10^{-13}$	$1,69689 \cdot 10^{-12}$
6	$1,090133397$	$-0,868080234$	—	—	—

Se tivéssemos usado a aproximação inicial $x_0 = -1,5$ *e* $y_0 = 0,5$, *então obteríamos a solução* $x = -1,090133397$ *e* $y = 0,868080234$

Exemplo B.2 *Determinar uma solução aproximada do sistema*

$$\begin{cases} \cos(x+y) - e^{-x+y} + x^2 - y^2 = 5 \\ y\,\mathrm{sen}(x) + 1 = x^3 + ye^x \end{cases}$$

com erro inferior a $\varepsilon = 10^{-7}$.

Sejam $f(x,y) = \cos(x+y) - e^{-x+y} + x^2 - y^2 - 5$ *e* $g(x,y) = y\,\mathrm{sen}(x) - ye^x - x^3 + 1$. *Tentamos vários valores para* x *e para* y *e observamos que quando* $x = 2$ *e* $y = -1$ *temos* $f(2,\,-1) \approx -1,509$ *e* $g(2,\,-1) \approx -0,520$. *Como são resultados relativamente pequenos, consideramos a possibilidade do sistema ter solução próxima de* $(2,-1)$.

Assim, aplicamos o algoritmo descrito em B.2.1, partindo de $x_0 = 2$ *e* $y_0 = -1$. *A partir dessa aproximação inicial, depois de 5 iterações, obtemos a seguinte solução aproximada do sistema:* $x = 2,5105953054$ *e* $y = -1,2646405707$.

n	x_n	y_n	h	k	Δ
0	$2,000000000$	$-1,000000000$	$0,641826961$	$0,495786238$	$0,811015315$
1	$2,641826961$	$-1,495786238$	$-0,124205797$	$0,197175658$	$0,233035019$
2	$2,517621163$	$-1,298610580$	$-0,007234158$	$0,033733231$	$0,034500202$
3	$2,510387004$	$-1,264877348$	$2,08267 \cdot 10^{-4}$	$2,36837 \cdot 10^{-4}$	$3,15384 \cdot 10^{-4}$
4	$2,510595271$	$-1,264640511$	$3,34685 \cdot 10^{-8}$	$-5,94949 \cdot 10^{-8}$	$6,82626 \cdot 10^{-8}$
5	$2,510595305$	$-1,264640570$	—	—	—

B.4 Exercícios Propostos

(P73) Determine uma solução com um erro inferior a $\varepsilon = 0,001$ do sistema $\left\{\begin{array}{l} 2x^3 - y^2 = 1 \\ xy^3 = y + 4 \end{array}\right.$, partindo de $x_0 = 1,\ y_0 = 2$. Resp.: $x = 1,234274,\ y = 1,661526$.

(P74) Determine uma solução com um erro $\varepsilon \leq 0,01$ do sistema de equações $\left\{\begin{array}{l} xy + 5x = 2x^2 + 1 \\ x + 3\ln x = y^2 \end{array}\right.$, partindo de $x_0 = 4,\ y_0 = 2$. Resp.: $x = 3,756834,\ y = 2,779849$.

(P75) Determine uma solução com um erro $\varepsilon \leq 10^{-7}$ do sistema de equações $\left\{\begin{array}{l} x^2 + 4y^4 - 6 = 0 \\ ye^x - xe^y - 1 = 0 \end{array}\right.$, partindo de $x_0 = 1,5,\ y_0 = 1,5$. Resp.: $x = 1,78599262,\ y = 0,91552557$.

(P76) Lembrando que se $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, então $M^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$, onde $D = \det(M) = a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - eg)$, usando o método de Newton da seção B.2.2, descreva um algoritmo semelhante ao de B.2.1 para resolução de um sistema 3×3.

(P77) A partir de $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$, determine uma solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \ln(y^2 + z^3) - x^3 z = 3 \\ \cos x + xy^2 - e^z = 1 \\ xyz - \operatorname{sen}(x + z) = 2 \end{array}\right.$$

com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-6}$. Resp.: $x = 0,3833245,\ y = 4,0308765,\ z = 1,8173736$

Referências Bibliográficas

[1] K. Atkinson (1985), *Elementary Numerical Analysis*, John Wiley & Sons.

[2] D. M. Cláudio, J. M. Marins (1994), *Cálculo Numérico Computacional*, Ed. Atlas.

[3] B. P. Demidovich, I. A. Maron (1976), *Computational Mathematics*, Mir Publishers, Moscow.

[4] J. R. R. Galván (2007), *Maxima con wxMaxima: software libre en el aula de matemáticas*, Oficina de Software Libre de la Universidad de Cádiz, disponível em `http://maxima.sourceforge.net/documentation.html`

[5] N. V. Kopchenova, I. A. Maron (1975), *Computational Mathematics – worked examples and problems with elements of theory*, Mir Publishers, Moscow.

[6] E. Kreyszig (1999), *Advanced Engineering Mathematics*, 8th edition, J. Wiley & Sons.

[7] M. A. G. Ruggiero e V. Lopes (1996), *Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais*, 2a. edição, Pearson Education.

[8] M. Sadosky (1973), *Cálculo Numérico e Gráfico*, Ed. Interciência.

[9] W. L. Roque (2000), *Introdução ao Cálculo Numérico – um texto integrado com Derive*, Ed. Atlas.

[10] J. E. Villate (2007), *Introdução aos Sistemas Dinâmicos – Uma abordagem prática com Maxima*, disponível em `http://fisica.fe.up.pt/maxima/book/sistdinam-1_2.pdf`

Lenimar Nunes de Andrade nasceu no sertão do Rio Grande do Norte no início da década de 60. Descobriu sua vocação para professor de Matemática aos 12 anos de idade, quando dava aulas particulares a muitos colegas do colégio. Obteve o título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba em 1982, Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco em 1987 e de Doutor em Engenharia Elétrica pela UNICAMP em 1998. Em 1984, ingressou como professor de Matemática da Universidade Federal da Paraíba e em 2014 passou a ser Professor Titular. Já teve oportunidade de ministrar mais de 30 disciplinas diferentes, algumas em nível de pós-graduação. Atualmente, é professor de Cálculo Numérico, Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Vetorial e Geometria Analítica para alunos de cursos como Engenharia Civil, Engenharia Mecânica, Engenharia Elétrica, Engenharia da Computação, Bacharelado em Física, Bacharelado em Matemática, entre outros. Nos últimos 9 anos tem se dedicado também ao ensino a distância através da Universidade Aberta do Brasil.