Os métodos de Krylov, de Leverrier e dos coeficientes inderteminados para o cálculo do polinômio característico de uma matriz

Lenimar Nunes de Andrade
UFPB, João Pessoa, PB
e-mail: lenimar@mat.ufpb.br

9 de abril de 2014

Resumo

Neste texto apresentamos três métodos para o cálculo do polinômio característico de uma matriz $n \times n$. Para $n > 5$ esses métodos mostram-se eficientes.

1 Fórmula de Newton

Sejam $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ um polinômio de grau n com raízes x_i e $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, com $k = 1, \cdots, n$.

Então

$$s_k + a_1 s_{k-1} + \cdots + a_{k-1} s_1 = -k a_k$$

para $k = 1, 2, \cdots, n$.

Esse resultado é conhecido como *fórmula de Newton* e pode ser encontrado na referência bibliográfica [1].

Exemplo: Consideremos a equação polinomial

$$x^6 - 2x^5 - 16x^4 + 32x^3 + 85x^2 - 110x - 150 = 0.$$

As raízes da equação dada são $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = \sqrt{5}$, $x_4 = -\sqrt{5}$, $x_5 = 3 - i$ e $x_6 = 3 + i$.

Calculando s_k, a soma das k-ésimas potências dos x_i, obtemos $s_1 = 2$ (soma das raízes), $s_2 = 36$ (soma dos quadrados das raízes), $s_3 = 8$ (soma dos cubos das raízes), $s_4 = 188$, $s_5 = -268$ e $s_6 = 276$.

Observe que

$$s_6 - 2s_5 - 16s_4 + 32s_3 + 85s_2 - 110s_1 = 900 = (-6) \cdot (-150)$$

e também que

$$s_3 - 2s_2 - 16s_1 = -96 = (-3) \cdot (32).$$

2 Método de Leverrier

Sejam $p(x) = \det(xI - A) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ o polinômio característico da matriz A e $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ as raízes de $p(x)$ (ou seja, λ_i são os *autovalores* de A) e $s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k$, $k = 1, \cdots, n$.

Pela fórmula de Newton para $k \leq n$ temos

$$s_k + a_1 s_{k-1} + \cdots + a_{k-1}s_1 = -ka_k$$

com $k = 1, 2, \cdots, n$.

Daí temos:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -s_1 \\
a_2 &= -\frac{1}{2}(s_2 + a_1 s_1) \\
&\vdots \\
a_n &= -\frac{1}{n}(s_n + a_1 s_{n-1} + \cdots + a_{n-1}s_1)
\end{aligned}$$

Agora, $s_1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Como $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$ são os autovalores de A^k, temos que $s_k = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k = \mathrm{tr}(A^k)$.

Exemplo: Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular o polinômio característico de A usando o método de Leverrier.

Temos $A^2 = \begin{bmatrix} 30 & 22 & 18 & 20 \\ 22 & 18 & 16 & 18 \\ 18 & 16 & 18 & 22 \\ 20 & 18 & 22 & 30 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 208 & 178 & 192 & 242 \\ 178 & 148 & 154 & 192 \\ 192 & 154 & 148 & 178 \\ 242 & 192 & 178 & 208 \end{bmatrix}$,

$A^4 = \begin{bmatrix} 2108 & 1704 & 1656 & 1992 \\ 1704 & 1388 & 1368 & 1656 \\ 1656 & 1368 & 1388 & 1704 \\ 1992 & 1656 & 1704 & 2108 \end{bmatrix}$.

Calculando os traços das matrizes anteriores: $s_1 = \mathrm{tr}(A) = 4$, $s_2 = \mathrm{tr}(A^2) = 96$, $s_3 = \mathrm{tr}(A^3) = 712$, $s_4 = \mathrm{tr}(A^4) = 6992$ e daí

$$\begin{aligned}
a_1 &= -s_1 = -4 \\
a_2 &= -\frac{1}{2}(s_2 + a_1 s_1) = -\frac{1}{2}(96 - 16) = -40 \\
a_3 &= -\frac{1}{3}(s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1) = -\frac{1}{3}(712 - 4 \cdot 96 - 40 \cdot 4) = -56 \\
a_4 &= -\frac{1}{4}(s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1) = -\frac{1}{4}(6992 - 4 \cdot 712 - 40 \cdot 96 - 56 \cdot 4) = -20
\end{aligned}$$

Logo, $p(x) = x^4 - 4x^3 - 40x^2 - 52x - 20$.

3 Método de Krylov

Seja $p(x) = \det(xI - A) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, $A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n I = 0$.

Seja $y_0 = \begin{bmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{bmatrix}$ um vetor não nulo qualquer. Então:

$A^n y_0 + a_1 A^{n-1} y_0 + \cdots + a_n y_0 = 0$.

Fazendo $y_k = A^k y_0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ temos que a igualdade anterior é equivalente a $y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_n y_0 = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} y_{n-1\ 1} & \cdots & y_{11} & y_{01} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1\ n} & \cdots & y_{1n} & y_{0n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y_{n1} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{bmatrix}.$$

A partir daí, podemos calcular os coeficientes a_i.

Exemplo: Consideremos $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Seja $y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Temos:

$$\begin{aligned} y_1 = Ay_0 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y_2 = Ay_1 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y_3 = Ay_2 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 157 \\ 28 \\ 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos o sistema linear 3×3 nas variáveis a_1, a_2, a_3:

$$\begin{bmatrix} 28 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 157 \\ 28 \\ 5 \end{bmatrix}$$

cuja solução é: $a_1 = -5$, $a_2 = -3$ e $a_3 = -2$ e daí

$$p(x) = x^3 - 5x^2 - 3x - 2.$$

4 Método dos Coeficientes Indeterminados

Suponhamos $p(x) = \det(xI - A) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Fazendo $x = 0, 1, \cdots, n-1$ temos

$$
\begin{aligned}
a_n &= p(0) = \det(-A)\\
1^n + a_1 \cdot 1^{n-1} + \cdots + a_n &= p(1) = \det(I - A)\\
2^n + a_1 \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_n &= p(2) = \det(2I - A)\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
(n-1)^n + a_1 \cdot (n-1)^{n-1} + \cdots + a_n &= p(n-1) = \det((n-1)I - A)
\end{aligned}
$$

e daí obtemos o sistema linear nas variáveis $a_1, \cdots, a_{n-1}$:

$$
\left\{
\begin{array}{c}
a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = \det(I - A) - 1 - \det(-A)\\
2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}a_2 + \cdots + 2a_{n-1} = \det(2I - A) - 2^n - \det(-A)\\
\vdots\\
(n-1)^{n-1}a_1 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = \det((n-1)I - A) - (n-1)^n - \det(-A)
\end{array}
\right.
$$

cuja solução fornece os coeficientes do polinômio característico..

5 Comparações

Para $n > 5$ os métodos de Leverrier e de Krylov mostram-se eficientes para o cálculo do polinômio característico, usando muito menos operações aritméticas do que o método direto.

	Quantidade total de operações aritméticas			
Método	Ordem 3	Ordem 5	Ordem 7	Ordem 9
Direto	32	558	23.770	1.712.158
Leverrier	68	744	3.324	9.872
Krylov	105	669	2.309	5.897
Coef. Indet.	108	629	2.134	5.447
Danilevski	26	172	534	1.208

Tabela 1: Comparação entre diversos métodos

Referências

[1] Kurosh, A. G, *Curso de Algebra Superior*, Editorial Mir, 1977.

[2] Faddeeva, V. N., *Computational Methods of Linear Algebra*, Dover Publications, Inc., 1959.