Trigonometria e Equações Polinomiais

Lenimar Nunes de Andrade
UFPB – João Pessoa

4 de novembro de 2013

Em 1593, Adriaan van Roomen, professor de matemática e medicina na Bélgica, publicou um trabalho intitulado *Ideae Mathematicae*, que continha, entre outros problemas propostos, algo bastante desafiador: uma equação algébrica de grau 45. Com a nossa notação atual, pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} x^{45} - 45\,x^{43} + 945\,x^{41} - 12300\,x^{39} + 111150\,x^{37} - 740259\,x^{35} + 3764565\,x^{33} \\ - 14945040\,x^{31} + 46955700\,x^{29} - 117679100\,x^{27} + 236030652\,x^{25} \\ - 378658800\,x^{23} + 483841800\,x^{21} - 488494125\,x^{19} + 384942375\,x^{17} \\ - 232676280\,x^{15} + 105306075\,x^{13} - 34512075\,x^{11} + 7811375\,x^{9} \\ - 1138500\,x^{7} + 95634\,x^{5} - 3795\,x^{3} + 45\,x = A \end{aligned}$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$$

Na época, o embaixador belga apresentou esse problema a Henrique IV, rei da França, e chegou a dizer que não tinha alguém da França que conseguisse resolvê-lo. Daí, o rei convocou os franceses para *"salvarem a honra da nação"*. E foi então que François Viète (1540-1603) – na figura a seguir – entrou nessa história.

Sem demora, Viète observou que essa equação poderia ser obtida através da utilização de fórmulas do seno do múltiplo de um arco, e obteve muitas das suas raízes. Diversos assuntos podem ser abordados na resolução desse problema.

Seno e cosseno de arcos múltiplos

Na época de Viète, eram conhecidas fórmulas equivalentes ao que hoje denotamos por $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ e também $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$. A partir daí, podemos fazer $a = b = \alpha$ para obter $\cos 2\alpha$ e $\operatorname{sen} 2\alpha$. Depois, podemos fazer $a = 2\alpha$ e $b = \alpha$ para obter $\cos 3\alpha$ e $\operatorname{sen} 3\alpha$ e também $a = 3\alpha$ e $b = 2\alpha$ para obter $\cos 5\alpha$ e $\operatorname{sen} 5\alpha$:

- $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$
- $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$
- $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Na simplificação, utilizamos as fórmulas para $\operatorname{sen} 2\alpha$ e $\cos 2\alpha$ anteriores e que $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$.
- $\operatorname{sen} 3\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha+\alpha) = \operatorname{sen} 2\alpha \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cos 2\alpha = -4\operatorname{sen}^3\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha$.
- $\cos 5\alpha = \cos(3\alpha + 2\alpha) = \cos 3\alpha \operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha \cos 2\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$
- $\operatorname{sen} 5\alpha = \operatorname{sen}(3\alpha+2\alpha) = \operatorname{sen} 3\alpha \cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha \cos 3\alpha = 16\operatorname{sen}^5\alpha - 20\operatorname{sen}^3\alpha + 5\operatorname{sen}\alpha$.

De um modo geral, dado um inteiro positivo n, é possível obter $\cos n\alpha$ e $\operatorname{sen} n\alpha$ como combinação de potências de $\cos\alpha$ e de $\operatorname{sen}\alpha$.

Substituindo agora $\alpha = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ radianos na equação

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$$

resulta em

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 16\cos^5 12^\circ - 20\cos^3 12^\circ + 5\cos 12^\circ,$$

ou seja,

$$32\cos^5 12^\circ - 40\cos^3 12^\circ + 10\cos 12^\circ - 1 = 0,$$

o que significa que $\cos 12^\circ$ é raiz da equação $p(x) = 32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0$. As possíveis raízes racionais dessa equação são $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{8}$, $\pm\frac{1}{16}$ e $\pm\frac{1}{32}$. Por tentativas, encontramos $x = \frac{1}{2}$ como única raiz racional dessa equação e dividindo $p(x)$ por $x - \frac{1}{2}$ obtemos

$$p(x) = 2(x - \frac{1}{2})(16x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 8x + 1).$$

Usando um método como o que foi apresentado no artigo *"Uma solução das equações do* 3° *e do* 4° *graus"* da RPM 25, podemos determinar que as raízes da equação $16x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 8x + 1 = 0$ são $-\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}$ e $-\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}$.

Levando em conta que $\cos 12^\circ > \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, escolhemos a única opção para $\cos 12^\circ$ entre as raízes obtidas anteriormente:

$$\cos 12^\circ = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}$$

e, a partir daí, podemos calcular imediatamente o $\operatorname{sen} 12^\circ$:

$$\operatorname{sen} 12^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 12^\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}} = \frac{1}{2}A$$

A equação de Van Roomen

A equação que aparece no início deste artigo é de grau 45. Como $45 = 5 \cdot 3 \cdot 3$, calculamos o seno de $9\alpha = 3 \cdot 3\alpha$ e também o seno de $45\alpha = 5 \cdot 9\alpha$. Para isso, substituímos α por 3α na fórmula $\operatorname{sen} 3\alpha = -4\operatorname{sen}^3\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha$ e obtemos $\operatorname{sen}(3 \cdot 3\alpha) = -4\operatorname{sen}^3 3\alpha + 3\operatorname{sen} 3\alpha$, ou seja,

$$\operatorname{sen} 9\alpha = -4(-4\operatorname{sen}^3\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha)^3 + 3(-4\operatorname{sen}^3\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha)$$

que pode ser simplificada para

$$\operatorname{sen} 9\alpha = 256\operatorname{sen}^9\alpha - 576\operatorname{sen}^7\alpha + 432\operatorname{sen}^5\alpha - 120\operatorname{sen}^3\alpha + 9\operatorname{sen}\alpha.$$

Nessa fórmula, substituindo α por 5α, obtemos

$$\operatorname{sen}(9 \cdot 5\alpha) = 256\operatorname{sen}^9 5\alpha - 576\operatorname{sen}^7 5\alpha + 432\operatorname{sen}^5 5\alpha - 120\operatorname{sen}^3 5\alpha + 9\operatorname{sen} 5\alpha$$

. Na fórmula anterior, substituindo $\operatorname{sen} 5\alpha$ por $16\operatorname{sen}^5\alpha - 20\operatorname{sen}^3\alpha + 5\operatorname{sen}\alpha$, obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 45\alpha = {} & 256(16\operatorname{sen}^5\alpha - 20\operatorname{sen}^3\alpha + 5\operatorname{sen}\alpha)^9 - 576(16\operatorname{sen}^5\alpha - 20\operatorname{sen}^3\alpha \\ & + 5\operatorname{sen}\alpha)^7 + 432(16\operatorname{sen}^5\alpha - 20\operatorname{sen}^3\alpha + 5\operatorname{sen}\alpha)^5 - 120(16\operatorname{sen}^5\alpha \\ & - 20\operatorname{sen}^3\alpha + 5\operatorname{sen}\alpha)^3 + 9(16\operatorname{sen}^5\alpha - 20\operatorname{sen}^3\alpha + 5\operatorname{sen}\alpha)\end{aligned}$$

que pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 45\alpha = {} & 17592186044416\operatorname{sen}^{45}\alpha - 197912092999680\operatorname{sen}^{43}\alpha + \\ & 1039038488248320\operatorname{sen}^{41}\alpha - 3380998255411200\operatorname{sen}^{39}\alpha + \cdots + 45\operatorname{sen}\alpha\end{aligned}$$

Nessa última igualdade, o coeficiente de $\operatorname{sen}^{45}\alpha$ é igual a 2^{44}. Logo, o primeiro termo é igual a $2^{44}\operatorname{sen}^{45}\alpha = \dfrac{(2\operatorname{sen}\alpha)^{45}}{2}$.

Fazendo $2\operatorname{sen}\alpha = x$, isto é, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{2}$, a igualdade anterior se transforma em

$$\operatorname{sen} 45\alpha = \frac{x^{45}}{2} - \frac{45x^{43}}{2} + \frac{945x^{41}}{2} - 6150x^{39} + 55575x^{37} - \frac{740259x^{35}}{2} + \cdots + \frac{45x}{2}$$

que equivale a

$$2\operatorname{sen} 45\alpha = x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + 111150x^{37} - 740259x^{35} + \cdots + 45x$$

Esse polinômio de grau 45 na variável x que aparece no segundo membro é o mesmo que aparece na equação de Van Roomen.

Portanto, a equação de Van Roomen é equivalente a

$$2\operatorname{sen} 45\alpha = 2\operatorname{sen} 12^\circ = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{15}$$

que é o mesmo que $\operatorname{sen} 45\alpha = \operatorname{sen}\frac{\pi}{15}$ com $2\operatorname{sen}\alpha = x$.

As soluções dessa equação trigonométrica são imediatamente encontradas: são $45\alpha = \frac{\pi}{15} + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Outras soluções como $45\alpha = (\pi - \frac{\pi}{15}) + 2n\pi$ com $n \in \mathbb{Z}$ são apenas repetições das que já foram obtidas anteriormente.

Fazendo k assumir valores de 0 a 44, obtemos 45 diferentes valores para α e, usando que $x = 2\operatorname{sen}\alpha$ obtemos todas as raízes da equação polinomial:

$$x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{675} + \frac{2k\pi}{45}\right), k = 0, 1, \ldots, 44$$

Alguns exemplos dessas raízes são:

- $k = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{675} \Rightarrow x = 2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{675}) = 0,00930838$
- $k = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{31\pi}{675} \Rightarrow x = 2\operatorname{sen}(\frac{31\pi}{675}) = 0,28756098$
- $k = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{61\pi}{675} \Rightarrow x = 2\operatorname{sen}(\frac{61\pi}{675}) = 0,56021653$
- $k = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{91\pi}{675} \Rightarrow x = 2\operatorname{sen}(\frac{91\pi}{675}) = 0,82196811$
- ... ...
- $k = 44 \Rightarrow \alpha = \frac{1321\pi}{675} \Rightarrow x = 2\operatorname{sen}(\frac{1371\pi}{675}) = -0,26912538$

E, dessa forma, todas as raízes podem ser calculadas.

Viète foi o primeiro matemático a fazer uso significativo de métodos algébricos na trigonometria. Sua solução foi apresentada no trabalho intitulado *Responsum*, em 1595 E, com isso, acabara-se a disputa para resolver esse problema, e Van Roomen chegou até a viajar para a França para conhecer Viète pessoalmente.

Exercício proposto

Para encerrar, deixamos uma equação *"à moda Van Roomen"*

$$x^{17} - 17x^{15} + 119x^{13} - 442x^{11} + 935x^{9} - 1122x^{7} + 714x^{5} - 204x^{3} + 17x = \sqrt{2}$$

para ser resolvida a título de exercício. Uma das raízes é $2\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{68} = 0,80784201$.

Referências

[1] Boyer, C. B., *História da Matemática*, Ed. Edgard Blücher Ltda., 1974.

[2] Maor, E., *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, 1998.