EQUAÇÕES ELÍPTICAS MODELADAS EM VARIEDADES RIEMANNIANAS: UMA INTRODUÇÃO*

Dedicado ao Professor D. G. de Figueiredo, com admiração, na ocasião do seu 70º aniversário

Olímpio Hiroshi Miyagaki [1]
Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática
36571-000 Viçosa-MG (Brasil)
e-mail: olimpio@mail.ufv.br

*Apresentado no MILÊNIO WORKSHOP EM EQUAÇÕES ELÍPTICAS, congresso em homenagem ao Prof. D. G. de Figueiredo, 27 a 30 de Janeiro de 2004, UFCG/UFPB,Campina Grande/João Pessoa, Paraíba

[1]Financiado parcialmente pelo CNPq/Brasil

Márcia, esposa
André, Daniela e Graziela, filhos
pelo incentivo e motivação

em memória da minha mãe

Prefácio. Desde o aparecimento da conjectura de Yamabe, muitos matemáticos têm se dedicado a estudar Equações Diferenciais Parciais modelados em variedades riemannianas compactas ou não compactas. A nossa proposta é apresentar uma nota contendo noções preliminares de Geometria Riemanniana e de Equações Diferenciais Parciais para mergulharmos no mundo das EDP's geométricas.

Essa nota foi baseada: no livro biblíco, Geometria Riemanniana de autoria de M. P. do Carmo; no livro publicado pela SBM no 19º CBM-SBM devido a Escobar; no artigo devido a Lee e Parker, bem como a do Kazdan e Warner; na tese da Karly defendida na UnB; nas notas de aulas do Hebey ministradas na Universidade de Roma e nas inúmeras "conversas " gratificantes com os meus amigos: Carrião e Suzana da UFMG e Claudianor da UFCG.

Devido à um curto espaço de tempo entre o convite para ministrar um minicurso e o congresso, peço desculpas pelos inúmeros erros técnicos e tipográficos, mas gostaria muito de receber críticas e sugestões.

Meus agradecimentos à Comissão organizadora pelo convite e pela oportunidade, e especialmente, ao prof. J.M. Bezerra do Ó, pela paciência na cobrança do manuscrito.

Viçosa-MG, 15 de Janeiro de 2004

Olímpio Hiroshi Miyagaki

Ementa. Geometria Riemanniana e teoria linear das equações diferenciais parciais. Desigualdades isoperimétricas. Deformação conforme das métricas. O Problema de Yamabe. Seqüências minimizantes. Método de sub-super solução. Aplicações.

Palavras Chaves. Operador de Laplace-Beltrami. Deformação conforme. método variacional.

Não há saber mais ou saber menos, há saberes diferentes. Paulo Freire

Conteúdo

1 Preliminares

Nessa seção apresentaremos brevemente as definições e propriedades importantes da Geometria Riemanniana que serão usadas nas notas, bem como algumas considerações sobre os Espaços de Schauder e de Sobolev, dos resultados de regularidade e o princípio de máximo. Referências básicas dessa seção são [1, 3, 9, 10, 11, 12, 14, 15] e [17].

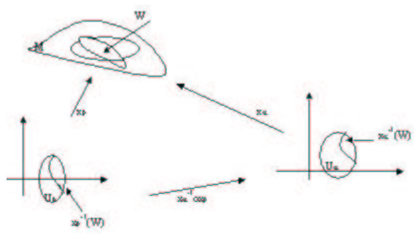
1.1 Variedades Riemannianas

Começaremos com alguns fatos básicos da Geometria Riemanniana.

Definição 1.1 *Uma Variedade Diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset I\!R^n \to M$ de abertos U_α de $I\!R^n$ em M tais que:*

1) $\bigcup\limits_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha) = M$

2) *Para todo α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $I\!R^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.*



Uma variedade M de dimensão n será denotada por M^n.

A família $\{(U_\alpha,\ x_\alpha)\}$ é maximal, e o par $(U_\alpha,\ x_\alpha)$ (ou a aplicação x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização ou sistema de coordenadas de M em p, $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado vizinhança coordenada em p. A família $\{(U_\alpha,\ x_\alpha)\}$ satisfazendo (**1**) e (**2**) é chamada estrutura diferenciável em M.

Observação 1.1 *Uma estrutura diferenciável em M induz uma topologia (natural) em M, definindo $A \subset M$ é um aberto de M se $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de $I\!R^n$ para todo α. Desta forma $x_\alpha(U_\alpha)$ são abertos e x_α são contínuas. Note que M e $\emptyset$ são abertos, etc.*

Exemplo 1.1 $M = I\!R^n$ *(espaço euclidiano),* $M = S^{n-1} = \{x \in I\!R^n : |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$ *(esfera) e o conjunto das retas de $I\!R^{n+1}$ que passam pela origem* $0 = (0, \ldots, 0) \in I\!R^{n+1}$, *denominado espaço projetivo real $P^n(I\!R)$.*

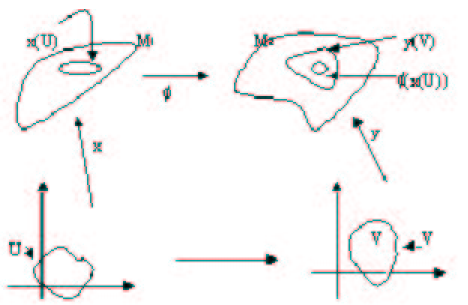
Muitas vezes consideraremos variedades com bordo. Dizemos que M é uma variedade com bordo ∂M, se cada ponto de M possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto de $I\!R^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \ x_1 \geq 0\}$. Os pontos interiores a M são aqueles pontos onde existe um homeomorfismo com um aberto do $I\!R^n$, e os outros são denominados pontos de fronteira de M. Além disso, se M é uma variedade $n-$dimensional de classe C^k com bordo, onde $\partial M \neq \emptyset$, então ∂M é uma variedade $n-1-$ dimensional sem bordo de classe C^{k-1}. (veja [4])

Introduziremos a noção do cálculo diferencial para aplicações entre variedades.

Definição 1.2 *Sejam $M_1 = M_1^n$ e $M_2 = M_2^m$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\phi : M_1 \to M_2$ é* diferenciável *em $p \in M_1$, se dada uma parametrização $y : V \subset I\!R^m \to M_2$ em $\phi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset I\!R^n \to M_1$ em p tal que $\phi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação*

$$y^{-1} \circ \phi \circ x : x^{-1}(U) \subset I\!R^n \longrightarrow I\!R^m \tag{1.1}$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$.



Dizemos que f é diferenciável em um aberto $A \subset M$, quando f for diferenciável em todos os pontos de A. Note que da Definição 1.1 (**2**) a definição acima independe da escolha das parametrizações. Uma aplicação $f : M_1 \to M_2$ é difeomorfismo se ela é bijetora e ambas f e f^{-1} são diferenciáveis.

Definição 1.3 *Seja M uma variedade diferenciável. Seja α uma curva em M, ou seja uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$. Suponha $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O* Vetor Tangente *à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to I\!R$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} |_{t=0}, \ f \in \mathcal{D}.$$

Notação: T_pM denota o conjunto dos vetores tangentes a M em p, ou seja o conjunto dos vetores tangentes em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, com $\alpha(0) = p$.

Note que se escolhermos uma parametrização $x : U \subset I\!R^n \to M = M^n$ em $p = x(0)$, então se $f : M \to I\!R$ temos:

$$\begin{aligned}
\alpha'(0)f &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \mid_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)(\frac{\partial}{\partial x_i})_o)f
\end{aligned}$$

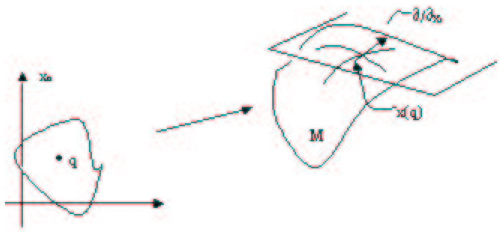
ou seja

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)(\frac{\partial f}{\partial x_i})_o$$

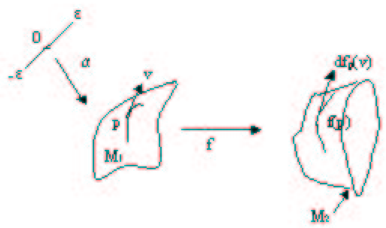
onde $(\frac{\partial}{\partial x_i})_o$ é o vetor tangente em p com relação à curva coordenada $\alpha(x_i) = x(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$, assim podemos assumir que os vetores

$$\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_o,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

geram o espaço T_pM.



Proposição 1.1 *Sejam $M_1 = M_1^n$ e $M_2 = M_2^m$ variedades diferenciáveis, e $f : M_1 \to M_2$ uma aplicação* diferenciável. *Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M_1$ com $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$. A aplicação $df_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ dada por $df_p(v) = (f \circ \alpha)'(0)$ é uma aplicação linear independente de α, denominada* diferencial *de f em p.*



Observação 1.2 *A matriz da aplicação df_p, nas bases associadas às parametrizações $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ e $y : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ é a matriz $(\frac{\partial y_i}{x_j})$.*

Exemplo 1.2 *Seja $M = M^n$ uma variedade diferenciável. O* fibrado tangente *$T(M) = \{(p, v) \in M \times T_p(M)\}$ é uma variedade de dimensão $2n$. Uma parametrização para $T(M)$ pode ser definida por $y : U \times \mathbb{R}^n \to T(M)$, dada por*

$$\begin{aligned} y(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_n) &= (x(x_1, x_2, \ldots, x_n), \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \\ &= (x(q), (dx)_q(v)), \end{aligned}$$

onde $v = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é uma parametrização de M, $q = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ são a coordenada de U e a base do espaços tangentes associada à x, respectivamente.

Definição 1.4 *Um ponto p num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é um ponto crítico de uma aplicação diferenciável $F : U \to \mathbb{R}^m$ quando a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ não é sobrejetora. Neste caso $F(p)$ é denominado valor crítico de f, caso contrário $F(p)$ é chamado valor regular de F. Pode-se provar que se $a \in F(U)$ é um valor regular, então $F^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão $n - m$.*

Definição 1.5 *Uma variedade M é dita ser* orientável *quando admite uma estrutura diferenciável (denominada orientação) $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que:*

1. *$x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, $\forall \alpha, \beta$.*
2. *A diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ tem determinante positiva.*

Caso contrário dizemos que M não é orientável.

Definição 1.6 *Um* campo de vetores (diferenciável) *X em uma variedade diferenciável M, é uma aplicação (diferenciável) $X : M \to TM$, que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor tangente $X(p)$. Podemos escrever*

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde $x : U \subset I\!R^n \to M$ é uma parametrização, $a_i : U \to I\!R$ são funções (diferenciáveis) e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ é a base associada à x. Com isso podemos usar a notação:

$$\begin{aligned} (Xf)(p) &= \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= df_p(X), \end{aligned}$$

para toda $f : M \to I\!R$ diferenciável.

Proposição 1.2 *Sejam X e Y dois campos diferenciáveis em M. Então existe um único campo Z tal que, $Zf = (XY - YX)f \equiv [X,Y]f$, $\forall f \in \mathcal{D}$.*

Prova: Unicidade Sejam $p \in M$ e $x : U \to M$ uma parametrização em p, e considere

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} b_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

as expressões de X e Y na parametrização x. Então $\forall f \in \mathcal{D}$, temos

$$\begin{aligned} XYf &= X(\sum_{j=1}^{n} b_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i(p) b_j(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} YXf &= Y(\sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} b_j(p) \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i(p) b_j(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \end{aligned}$$

onde Z é dado na parametrização x por

$$\begin{aligned} Zf &= XYf - YXf \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}) \frac{\partial f}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

o que mostra a unicidade.
Existência: Seja $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável de M. Defina Z_α em cada vizinhança coordenada de $x_\alpha(U_\alpha)$ pela expressão acima. Da unicidade $Z_\alpha = Z_\beta$ em $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\alpha) \neq \emptyset$, donde se define Z em toda M. ■

Enumeramos a seguir, algumas propriedades do colchete de Lie dada por $[X,Y] = XY - YX$.

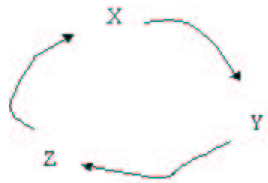
Proposição 1.3 *Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}$, $a, b \in I\!R$ e f, g são funções diferenciáveis, onde $\mathcal{X}$ denota o conjunto de campos em M. Então:*

a) $[X, Y] = [Y, X]$

b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$

c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$*(identidade de Jacobi)*

d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$



Prova: A prova de a), b) e c) decorrem imediatamente da definição. Quanto a d), vem:

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\ &= fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\ &= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X, \end{aligned}$$

aqui usamos o seguinte fato:

$$X(fY) = fXY + X(f)Y,\ X, Y \in \mathcal{X}, f \text{ função diferenciável.}$$

■

Definição 1.7 *Seja M uma variedade diferenciável e $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável de M. Dizemos que uma família de abertos $V_\alpha \subset M$ que cobre M, ou seja $M = \bigcup_\alpha V_\alpha$, é* localmente finita *se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U tal que $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices. Seja $f : M \to I\!R$. O* suporte *de f, denotado $suppf$ é o fecho do conjunto dos pontos onde f é diferente de zero. Dizemos que uma família $\{f_\alpha\}$ de funções diferenciáveis $f_\alpha : M \to I\!R$ é uma* partição diferenciável da unidade *(subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}$) se:*

1. *$f_\alpha \geq 0$, $suppf_\alpha \subset V_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$ (vizinhança coordenada), $\forall \alpha, \beta$.*

2. *A família $\{V_\alpha\}$ é localmente finita*

3. $\sum_{\alpha} f_\alpha(p) = 1, \ \forall p \ \in M.$

Observação 1.3 *Uma variedade diferenciável M possui uma partição diferenciável da unidade se, e somente se, toda componente conexa de M é de Hausdorff (dois pontos distintos de M existem vizinhanças destes dois pontos que não se intersectam) e tem base enumerável (M pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas).*

Definição 1.8 *Uma* métrica Riemanniana ou Estrutura Riemanniana *em uma variedade diferenciável M é uma lei que faz corresponder a cada ponto $p \in M$ um produto interno $< \cdot, \cdot >_p$ no espaço tangente T_pM, tal que, se $x : U \subset I\!R^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, \ldots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então*

$$< \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j} >|_q = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n),$$

é uma função diferenciável em U. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma Variedade Riemanniana.

Notação: As funções g_{ij} são chamadas expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $x : U \subset I\!R^n \to M$.

Definição 1.9 a: *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é chamado uma* Isometria *se:*

$$< u, v >|_p = < df_p(u), df_p(v) >|_{f(p)}, \ \forall p \in M, \ u, v \in T_pM.$$

b: *Dizemos que f é uma* Imersão *quando*

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N \text{ é injetiva}, \ \forall p \in M.$$

Observação 1.4 *Note que se N é uma variedade Riemanniana, uma imersão $f : M \to N$ induz uma estrutura Riemanniana em M, fazendo*

$$< u, v >|_p = < df_p(u), df_p(v) >|_{f(p)}, \ \forall p \in M, \ u, v \in T_pM.$$

Exemplo 1.3 a: *Sejam $M = I\!R^n$ e $\frac{\partial}{\partial x_i} \approx e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Então $< e_i, e_j > = \delta_{ij}$ métrica euclidiana em M.*
b: *Seja $M = S^{n-1}$ (esfera em $I\!R^n$). A métrica induzida por $I\!R^n$ em S^{n-1} é denominada* métrica canônia *de S^{n-1}.*
c: *Toda variedade diferenciável M de Hausdorff e com base enumerável possui uma métrica Riemanniana.*

Definição 1.10 *Denotemos por $\mathcal{X} = \mathcal{X}(M)$ e $\mathcal{D} = \mathcal{D}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e o conjunto das funções reais de classe C^∞ definidas em M, respectivamente. Uma* conexão afim ∇ *em M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \ (X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y,$$

satisfazendo:

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}$, $f, g \in \mathcal{D}$.

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}$.

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)\nabla_X Y$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}$, $f \in \mathcal{D}$.

Observação 1.5 *$\nabla_X Y(p)$ só depende do valor de $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X.*

De fato, escolhendo um sistema de coordenadas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e y em torno de p e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i \quad Y = \sum_j y_j X_j$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, temos

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{X_i}(\sum_j y_j X_j) = \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i(y_j) X_j.$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, vem

$$\nabla_X Y = \sum_k (\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k)) X_k,$$

donde $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p), y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X. Aqui, Γ_{ij}^k são os coeficientes da conexão ∇ ou os símbolos de Christoffel da conexão.

Definição 1.11 **a)** *Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado* paralelo *quando $\frac{DV}{dt} = 0$, $\forall t \in I$ ($\frac{DV}{dt}$ é chamada* derivada covariante *de V ao longo de c).*
b) *Seja M uma variedade diferenciável, munida de uma conexão afim ∇ e uma métrica riemanniana $< \cdot, \cdot >$. A conexão é dita* compatível *com a métrica $< \cdot, \cdot >$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c, tivermos $< P, P' >=$ constante.*

Observação 1.6 **a)** *Uma conexão afim ∇ em uma variedade riemanniana M é compatível com a métrica se e somente se*

$$X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >, \ \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}.$$

b) *Uma conexão afim ∇ em uma variedade riemanniana M é dita* simétrica *quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \ \forall X, Y \in \mathcal{X}.$$

Neste caso, em um sistema de coordenadas x, se ∇ for simétrica, então

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j], \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

c) *(*Levi-Civita)Dada uma variedade riemanniana, existe uma única conexão afim, simétrica e compatível com a metríca riemanniana. Neste caso, a conexão ∇ é univocamente determinada pela métrica $< \cdot, \cdot >$, pela relação:

$$\begin{aligned} < \nabla_Y X, Z > &= \frac{1}{2}(X < Y, Z > + Y < Z, X > - Z < X, Y > \\ &- < [X, Z], Y > - < [Y, Z], X > - < [X, Y], Z >). \end{aligned}$$

Daí, se $g_{ij} =< X_i, X_j >$ temos

$$\sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij})$$

ou seja

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k (\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}) g^{km},$$

onde (g^{km}) é a inversa da matriz (g_{km}).

Definição 1.12 *Uma curva parametrizada* $\alpha : I \to M$ *é uma* geodésica *quando*

$$\frac{D}{dt}(\frac{d\alpha}{dt}) = 0, \ \forall t \in I.$$

Observação 1.7 *Dado* $p \in M$ *existem uma vizinhança* V *de* p *em* M, $\epsilon > 0$ *e uma aplicação diferenciável*

$$\alpha : (-2, 2) \times \mathcal{U} \to M,$$

onde $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM : q \in V, w \in T_q M, |w| < \epsilon\}$, *tal que* $t \mapsto \alpha(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$ *é a única geodésica em* M *que no instante* $t = 0$ *passa por* q *com velocidade* w, *para todo* $q \in V$, $w \in T_q M$, $|w| < \epsilon$.
A aplicação exponencial em $\mathcal{U}$, $exp : \mathcal{U} \to M$, *dada por*

$$exp(q, v) = \alpha(1, q, v) = \alpha(|v|, q, v/|v|), \ (q, v) \in \mathcal{U},$$

é um difeomorfismo de uma vizinhança da origem do $T_q M$ *sobre um aberto de* M. *Neste caso,* $exp(V) = U$ *é chamada* vizinhança normal *em* p. *Se* $B_\epsilon(0) \subset V$, *então* $exp(B_\epsilon(0)) = B_\epsilon(p)$ *é denominada* bola normal ou geodésica *de centro* p *e raio* ϵ. *As geodésicas em* $B_\epsilon(p)$ *que partem de* p *são denominadas* geodésicas radiais.

Definição 1.13 *Uma* curvatura R *de uma variedade riemanniana* M *com conexão* ∇, *é uma lei que associa a cada par* $(X, Y) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ *uma aplicação* $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ *dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \ Z \in \mathcal{X}(M)$$

Observação 1.8 *Seja (U,x) um sistema de coordenadas em torno do ponto $p \in M$. Indicando $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, pondo*

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{\ell} R_{ijk}^{\ell} X_{\ell},$$

onde R_{ijk}^{ℓ} são as componentes da curvatura R em coordenadas x. Denote

$$R_{ijks} =< R(X_i, X_j)X_k, X_s >\equiv R(X_i, X_j, X_k, X_s),$$

então podemos exprimir R_{ijk}^{ℓ} em termos dos coeficientes Γ_{ij}^{k},

$$R_{ijks} = \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{\ell j}^{s} g_{si} - \frac{\partial}{\partial x_\ell}\Gamma_{kj}^{s} g_{si} + \Gamma_{\ell j}^{s}\Gamma_{ks}^{r} g_{ri} - \Gamma_{kj}^{s}\Gamma_{\ell s}^{r} g_{ri}.$$

A partir daqui estaremos usando a notação de Einstein, *um índice que aparece duas vezes num produto, este deve ser somado de 1 a n (dimensão do espaço). Por exemplo $v^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ denota*

$$\sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e $v^i \frac{\partial f^j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial f^j}$ é uma abreviação para

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v^i \frac{\partial f^j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial f^j}$$

Segue da identidade de Bianchi

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0, \;\; X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$$

que

$$(1.2) \quad (X,Y,Z,T) \equiv< R(X,Y)Z, T >=< R(Z,T)X, Y >\equiv (Z,T,X,Y).$$

Definição 1.14 *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\pi \subset T_pM$, o número*

$$K(x,y) \equiv K(\pi) = \frac{< R(x,y)x, y >}{|x \wedge y|^2} \equiv \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2},$$

é chamado curvatura seccional *de π em p, onde $\{x,y\}$ é uma base qualquer de π e $|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2 - < x,y >^2$.*

Proposição 1.4 *Sejam M uma variedade riemanniana $n-$dimensional, $p \in M$ e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Denote $R_{ijk\ell} =< R(e_i, e_j)e_k, e_\ell >$, $i,j,k,\ell = 1,2,\ldots,n$. Então $K(\pi) = K_0$ para todo $\pi \subset T_pM$ se, e somente se,*

$$R_{ijk\ell} = K_0(\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk}), \;\; \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & se \;\; r = s \\ 0 & se \;\; r \neq s \end{cases}$$

Definição 1.15 *(***Curvatura de Ricci e Curvatura média ou escalar***)* *Seja $x = z_n \in T_pM$, $|x| = 1$. Tome uma base ortonormal $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x, então*

$$Ric(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i < R(x, z_i)x, z_i >, \ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_j \ Ric(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ij} < R(z_i, z_j)z_i, z_j >, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

são chamadas curvatura de Ricci *na direção x e* curvatura média (escalar) *em p.*

As vezes, como no nosso trabalho, usaremos curvaturas sem normalizar-las.

Observação 1.9 *Notemos que tais curvaturas independem da escolha das bases.*

Com efeito, para ver isso defina a função linear $Q(x, y) =$ traço da aplicação $Z \mapsto R(X, Z)Y$. E daí da observação acima (1.2), vem

$$Q(x, y) = \sum_i < R(x, z_i)y, z_i >= \sum_i < R(y, z_i)x, z_i >= Q(y, x),$$

para uma base ortonormal $\{z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = x\}$ de T_pM. Logo, Q é simétrica e $Q(x, x) = (n-1)\ Ric(x)$ (independe da base). O mesmo acontece com $K(p)$.

Obteremos agora a expressão da curvatura em termos das componentes.

Defina agora a aplicação auto-adjunta K associada a Q dada por

$$< K(x), y >= Q(x, y).$$

Numa base ortonormal $\{z_i\}$ temos

$$\begin{aligned} \textit{traço de } K &= \sum_j < K(z_j), z_j >= \sum_j Q(z_j, z_j) \\ &= (n-1) \sum_j Ric(z_j) = n(n-1)K(p) \end{aligned}$$

Note também que em termos de componentes g_{ij} e R_{ijk}^{ℓ}, temos

$$S_g \equiv K(p) = \sum_{ijk} g^{ik} R_{ikj}^{j}, \tag{1.3}$$

De fato, seja $\{X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ base de sistema de coordenadas. Sejam a_{ij} dadas por

$$K(X_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$$

daí segue-se

$$Q(X_i, X_k) = K(X_i), X_k >= \sum_j a_{ij} g_{jk},$$

donde

$$a_{ij} = \sum_k Q(X_i, X_k) g^{ik}.$$

Portanto

$$\text{traço de } K = n(n-1)K(p) = n(n-1)\sum_i a_{ii} = n(n-1)\sum_{ik} g^{ik} Q(X_i, X_k).$$

Mas, $Q(X_i, X_k)$ *é o traço da aplicação* F *dada por*

$$F(Z) = R(X_i, Z)X_k.$$

Como $F(X_j) = R(X_i, X_j)X_k = \sum_\ell R^\ell_{ijk} X_\ell$, *temos*

$$Q(X_i, X_k) = \sum_j R^\ell_{ijk},$$

logo o desejado.

Exemplo 1.4 *A curvatura seccional das variedades* S^{n-1}, $I\!R^n$ *e* H^n*(espaço hiperbólico) são respectivamente:* $1, 0$ *e* -1. *E toda variedade riemanniana completa de curvatura seccional constante* K *é isométrico a uma das variedades acima, quando* $K = 1, 0$ *ou* -1, *respectivamente. Aqui* $H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n : x_n > 0\}$ *com a métrica* $g_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$.

1.2 O operador de Laplace-Beltrami

Nessa seção introduziremos a expressão para o operador de Laplace-Beltrami.

Definição 1.16 a) *Seja* $u \in C^\infty(M, I\!R)$. *O* gradiente *de* u *é um campo diferenciável em* M, *satisfazendo*

$$< grad\ u(p), v >= du_p(v), \quad \forall v \in T_pM.$$

b) *Seja* $Y \in \mathcal{X}(M)$. *A* divergência *de* Y *é uma função real em* M, *dada por*

$$div\, Y(p) = \text{traço de } F, \quad \text{onde} \quad F(Z)(p) = \nabla_Z Y(p).$$

c) *O* operador de Laplace-Beltrami *é definido como*

$$\Delta u = div \;\; grad\ u, \;\; u \in C^\infty(M, I\!R).$$

Exprimiremos as definições acima em coordenadas locais $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Assim

$$\text{grad } u = \sum_{i=1}^n a_i X_i,$$

donde

$$a_i = \sum_{j=1}^n g^{ij} X_j, \tag{1.4}$$

ou seja

$$\text{grad}u = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} X_i X_j.$$

Considere a aplicação linear

$$E(Y) = \nabla_Y \text{grad } u = \nabla_Y (\sum_i a_i X_i).$$

Usando a notação $\nabla_i = \nabla_{X_i}$, e avaliando nos elementos da base, vem

$$\begin{aligned} E(X_j) &= \nabla_j (\sum_j a_i X_i) = \sum_i (a_i \nabla_j X_i + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} X_i) \\ &= \sum_i a_i (\sum_k \Gamma_{ij}^k X_k) + \sum_k \frac{\partial a_k}{\partial x_j} X_k \end{aligned}$$

Logo

$$(1.5) \qquad \Delta u = \sum_j (\sum_i a_i \Gamma_{ij}^j + \frac{\partial a_j}{\partial x_j}).$$

Calculemos $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$, para isso derivamos $\sum_k g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij}$ em relação à x_j. Obtemos então

$$(1.6) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}(g^{ik}) = -\sum_{im} g^{jm} \frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} g^{ik} = -\sum_m g^{jm} \Gamma_{jm}^k - \sum_i g^{ik} \Gamma_{ji}^j$$

Substituindo-se (1.4) em (1.5), e usando (1.6) temos

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{ij} (\sum_k g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}) \Gamma_{ij}^j + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\sum_k g^{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}) \\ &= \sum_{jk} g^{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{ijk} g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^j - \sum_{jk} (\sum_m g^{jm} \Gamma_{jm}^k + \sum_i g^{ik} \Gamma_{ji}^j) \frac{\partial u}{\partial x_k}) \end{aligned}$$

assim

$$(1.7) \qquad \Delta u = \sum_{ij} g^{ij} (\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_m \frac{\partial u}{\partial x_m} \Gamma_{ij}^m).$$

Usando novamente (1.6) na expressão acima obtemos

$$(1.8) \qquad \Delta u = \sum_{ij} (\frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} (\frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_m g^{jm} \frac{\partial u}{\partial x_j} \Gamma_{im}^i).$$

Relembrando a expressão dos símbolos de Christoffel em termos da métrica, vem

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \Gamma_{ij}^i g^{mj} &= \frac{1}{2} (\sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} (g_{jk}) g^{ki} g^{mj} + \sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ki}) g^{ki} g^{mj} - \\ &\quad - \sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{ij}) g^{ki} g^{mj}), \end{aligned}$$

e derivando $\sum_j g_{jk}g^{mj} = \delta_{mk}$, em relação à x_i, e substituindo na expressão acima vem (lembrando que os dois últimos termos se cancelam),

$$\sum_{ij} \Gamma^i_{ij} g^{mj} = \frac{1}{2}(\sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{ki}) g^{ki} g^{mj}). \tag{1.9}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} \log\sqrt{\det g} &= \frac{1}{2\det g}(\sum_{i\ell} \frac{\partial}{\partial x_k}(g_{i\ell}) C_{i\ell}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\ell} \frac{C_{i\ell}}{\det g} \frac{\partial}{\partial x_k}(g_{i\ell}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\ell} g^{i\ell} \frac{\partial}{\partial x_k}(g_{i\ell}),
\end{aligned}$$

onde $C_{i\ell} = (-1)^{i+\ell}\det g(i/\ell)$ e $g(i/\ell)$ é a matriz obtida de g retirando-se a linha i e a coluna ℓ. Substituindo em (1.9), obtemos

$$\sum_{ij} \Gamma^i_{ij} g^{mj} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\log\sqrt{\det g}) g^{mj}.$$

Inserindo esta expressão em (1.8) temos uma nova expressão para o operador de Laplace-Beltrami,

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(g^{ij}\sqrt{\det g}\frac{\partial u}{\partial x_j}).$$

1.3 A integral

Começaremos introduzindo notações que se fazem necessárias ao nosso estudo. Fazendo

$$\nabla^{\alpha_j} = \sum_{\alpha_i} g^{\alpha_i\alpha_j} \nabla_{\alpha_i}, \tag{1.10}$$

temos

$$\Delta u = \sum_{\alpha_j} \nabla^{\alpha_j}\nabla_{\alpha_j} u = \sum_{\alpha_i,\alpha_j} g^{\alpha_i\alpha_j} \nabla_{\alpha_i}\nabla_{\alpha_j} u,$$

onde $\nabla_{\alpha_i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_i}}}$.

Denotaremos por

$$|\nabla^\ell u|^2 = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell} \nabla^{\alpha_1}\nabla^{\alpha_2}\ldots\nabla^{\alpha_\ell} u \nabla_{\alpha_1}\nabla_{\alpha_2}\ldots\nabla_{\alpha_\ell} u,$$

em particular

$$|\nabla^0 u| = |u|, \ |\nabla^1 u|^2 = |\nabla u|^2 = \sum_i \nabla^i u \nabla_i u,$$

onde $\nabla^\ell u = \nabla_{\alpha_i} \dots \nabla_{\alpha_\ell} u$ é a derivada covariante de ordem ℓ.

Usando a notação (1.10) do início da seção, pode-se provar que

$$|\nabla^\ell u|^2 = \sum_{\alpha_i,\beta_i(i=1,\dots,\ell)} g^{\alpha_1\beta_1} \dots g^{\alpha_{ell}\beta_{ell}} \nabla_{\beta_1} \dots \nabla_{\beta_\ell} u \nabla_{\alpha_1} \dots \nabla_{\alpha_\ell} u.$$

A fim de fixar os conceitos, provaremos no caso $\ell = 2$, mais exatamente

$$\nabla^i \nabla^j u = \sum_{k\ell} g^{i\ell} g^{jk} \nabla_\ell \nabla_k u.$$

Por (1.10), temos

$$\nabla^i \nabla^j u = \nabla^i (\sum_k g^{jk} \nabla_k u) = \sum_\ell g^{i\ell} \nabla_\ell (\sum_k g^{jk} \nabla_k u).$$

Logo basta mostrar que

$$\nabla_\ell g^{ik} \nabla_k u = g^{ik} \nabla_\ell \nabla_k u. \tag{1.11}$$

Verificação: Primeiramente faremos algumas considerações. Seja T um tensor de ordem r. A diferencial covariante ∇T de T, é um tensor de ordem $(r+1)$, que usando a Obs1.6a, é dada por

$$\begin{aligned} \nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) &= Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - \dots \\ &\quad - \dots T(Y_1, \dots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r), \end{aligned} \tag{1.12}$$

onde para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$ a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação à Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z).$$

Para $u, h \in C^\infty(M)$, temos

- **i)** $\nabla_Z u = \nabla u(Z) = du(Z)$, $Z \in \mathcal{X}(M)$ e portanto de (1.12) vem $\nabla u = du$.
- **ii)** $\nabla_{hZ} u(p) = \nabla u(hZ)(p) = du_p(h(p)Z(p)) = h(p) du_p(Z(p)) = (hdu(Z))(p)$, onde $Z \in \mathcal{X}(M)$.

De (1.12) vem

$$\nabla_Y \nabla_Z u = \nabla_Y (du(Z)) = \nabla du(Z, Y)$$

e

$$\nabla\nabla u(Z, Y) = \nabla_Y \nabla u(Z) = \nabla_Y \nabla_Z u.$$

Com isso usaremos a seguinte notação

$$\nabla\nabla u(Z, Y) = \nabla_Y \nabla_Z u.$$

Fazendo $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, e partindo do lado esquerdo de (1.11) vem

$$\nabla_\ell g^{jk} \nabla_k u = \nabla_\ell \nabla_{g^{jk} X_k} u = \nabla \nabla u(g^{jk} X_k, X_\ell).$$

Novamente de (1.12), **i**) e **ii**) vem

$$\begin{aligned}
\nabla_\ell g^{jk} \nabla_k u &= ((X_\ell \nabla u(g^{jk} X_k)) - \nabla u(\nabla_{X_\ell} g^{jk} X_k)) \\
&= X_\ell (g^{jk} du(X_k)) - du(g^{jk} \nabla_{X_\ell} X_k + dg^{jk}(\nabla_{X_\ell}) X_k) \\
&= d(g^{jk} du(X_k))(X_\ell) - g^{jk} du(\nabla_{X_\ell} X_k) - du(dg^{jk}(X_\ell)(X_k)) \\
&= d(g^{jk} du(X_k))(X_\ell) - g^{jk} du(\nabla_{X_\ell} X_k) - dg^{jk}(X_\ell) du(X_k) \\
&= g^{jk}(d(du(X_k))(X_\ell) - du(\nabla_{X_\ell} X_k)).
\end{aligned}$$

Mas notando que

$$\nabla_k \nabla_\ell u = \nabla_{X_\ell}(du)(X_k) = d(du(X_k))(X_\ell) - du(\nabla_{X_\ell} X_k)$$

fica provado a nossa afirmação (1.11).

Introduziremos agora a noção de integração em variedades riemannianas.

Seja V um espaço vetorial e $\{e_i\}, \{f_i\}$ duas bases de V. Se dV é uma $n-$forma multilinear alternada sobre V (veja [20]), não nula, então

$$\mathrm{dV}(v_1, \ldots, v_n) = \det(a_{ij}) \mathrm{dV}(e_1, \ldots, e_n), \quad v_i = \sum_j a_{ij} e_j.$$

Seja M uma variedade riemanniana orientável com métrica riemanniana g. Para cada $p \in M$, existe uma única $n-$forma dV verificando $\mathrm{dV}(v_1, \ldots, v_n) = +1$, onde $\{v_i, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ é uma base ortonormal orientada de T_pM. Seja (U, x) uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\{X_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ e componentes de g,

$$g_{ij}(p) = < X_i(p), X_j(p) >, \quad X_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Obteremos agora, uma expressão para a componente $dV(X_1, \ldots, X_n)$ em U em

termos da matriz (g_{ij}). Seja a_{ij} as componentes de $\{X_1, \ldots, X_n\}$ com relação à base orientada ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ com $p \in U$. Visto que $< v_i, v_j >= \delta_{ij}$, temos

$$g_{ij}(p) = < \sum_k a_{ik} v_k, \sum_\ell a_{j\ell} v_\ell >= \sum_k a_{ik} a_{jk}, \ 1 \leq i, j \leq n.$$

Fazendo $A = (a_{ik})$, vem $(g_{ij}(p)) = A^t A$. Mas como

$$dV(X_1, \ldots, X_n) = \det(a_{ik}) dV(v_1, \ldots, v_n), \ dV(v_1, \ldots, v)n) = +1,$$

e $\det(g_{ij}) = (\det A)^2$, temos

$$dV(X_1, \ldots, X_n) = (\det(g_{ij}))^{1/2}.$$

Assim, estamos prontos para definir a integral em M.

Seja M uma variedade riemanniana e (U, h) uma carta local com $x = \{x_i\}$ sistema de coordenadas locais. Seja $f : M \to I\!R$ uma função contínua com supp$f \subset U$. Define-se integral de f sobre M, como sendo

$$\int_M f dV = \int_{h(U)} (f \circ h^{-1}) \sqrt{|g|} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

onde $|g| = \det g$ e $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ é uma orientação natural. Agora se $f : M \to I\!R$, é contínua com supp$f \subset M$, define-se integral de f sobre M, como sendo

$$\int_M f dV = \sum_{i \in I} \int_M \alpha_i f dV,$$

onde $\{\alpha_i,\ i \in I\}$ é a partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_i\}$, sendo $(U_i, h_i), i \in I$, uma atlas (vizinhanças coordenadas). Na soma acima, somente um número finito de termos são não nulos, pois $K \cap \text{supp}\alpha_i = \emptyset$ exceto para um número finito de conjunto de índices i quando K é compacto.

Note que a definição acima independe da escolha da parametrização e da partição da unidade.

De fato, sejam (U, h) e (W, k) duas cartas locais tal que $U \cap W \neq \emptyset$, com sistemas de coordenadas $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ para cartas acima, respectivamente. Em $U \cap W$ temos

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} = B_{j\beta} \;\text{ e }\; \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} = C_{i\alpha}.$$

Denotamos B e C as matrizes jacobianas $(B_{j\beta})$ e $(C_{i\alpha})$ respectivamente. Suponha que supp$f \subset U \cap W$.
Como

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_n) &= k(\hat{h}(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= k(y_i(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n)), \end{aligned}$$

em que $\hat{h} = k \circ h^{-1}$ é um difeomorfismo, obtemos

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \;\text{ e }\; \frac{\partial h}{\partial x_\ell} = \sum_j \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_\ell}.$$

assim

$$g_{k\ell} =< \frac{\partial h}{\partial x_k}, \frac{\partial h}{\partial x_\ell} >= \sum_{ij} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \overline{g_{ij}} \frac{\partial y_j}{\partial x_\ell},$$

onde $\overline{g_{ij}}$ denota a expressão da métrica associada à parametrização k. Como

$$g = C^t \bar{g} C,\; g_{ij} = \overline{g_{\alpha\beta}} C_{i\alpha} C_{j\beta},\; \overline{g_{\alpha\beta}} = g_{ij} B_{\alpha i} B_{\beta j},$$

temos que

$$|g| = |C|^2|\bar{g}|.$$

Então, usando a igualdade acima, o fato que $CB = I$, a definição de integral e o teorema de mudança de variáveis no $I\!R^n$, temos

$$\begin{aligned}
\int_M f dV &= \int_{h(U\cap W)} (f\circ h^{-1})\sqrt{|g|}dx_1\wedge\ldots\wedge x_n \\
&= \int_{k(U\cap W)} (f\circ h^{-1}\circ h\circ k^{-1})\sqrt{|g|}|\ \det B|dy_1\wedge\ldots\wedge y_n \\
&= \int_{k(U\cap W)} (f\circ k^{-1})\sqrt{|g|}|\ \det B|dy_1\wedge\ldots\wedge y_n \\
&= \int_{k(U\cap W)} (f\circ k^{-1})\sqrt{|\bar{g}||C|^2}|\ \det B|dy_1\wedge\ldots\wedge y_n \\
&= \int_{k(U\cap W)} (f\circ k^{-1})\sqrt{|\bar{g}|}\ dy_1\wedge\ldots\wedge y_n,
\end{aligned}$$

portanto, isso mostra que independe da parametrização.

Agora, sejam (U_j, h_j) e (W_j, k_j), $\quad j \in J$ duas atlas e α_j e β_j, $j \in J\}$ as partições da unidade subordinada às coberturas $\{U_j,\ W_j, j \in J\}$, respectivamente. Temos, em virtude das somas serem finitas, que

$$\sum_{i\in I}\int_M \alpha_i f dV = \sum_{i\in I, j\in J}\int_M (\alpha_i\beta_j f dV = \sum_{j\in J}\int_M \beta_j f dV,$$

isso mostra que independe da escolha da partição.

Observe ainda que a aplicação $f \mapsto \int_M f dV$ define uma medida positiva de Radon, donde a teoria de integral de Lebesgue pode ser aplicada.

1.4 Espaços de Schauder e de Sobolev

Introduziremos os espaços das funções de Schauder e de Sobolev. Começaremos pelo espaço de Schauder. Para um inteiro não negativo k definimos $C^k(M)$ o conjunto das funções $f : M \to I\!R$, tendo derivadas covariantes contínuas, ou seja, dizemos que $f \in C^k(M)$ quando a derivada covariante $\nabla^\ell f$ é contínua para todo $\ell \leq k$. O espaço $C^k(\bar{M})$ é conjunto das funções em $C^k(M)$ cujas derivadas covariantes de ordem $\leq k$ possuem extensões contínuas em $\overline{M}$. O espaço $C_b^k(M)$ denota o espaço das funções limitadas em $C^k(M)$. Equipando esse espaço com a norma abaixo torna-se um espaço de Banach,

$$||u||_k = \sum_{i=1}^{k} ||\nabla u||_\infty,\ ||\nabla u||_\infty = \sup\{|\nabla u(x)| :\ x \in M\},\ u \in C^k(M).$$

Os espaços de Schauder $C^{k,\nu}(M)$ consiste de funções u tais que

$$||u||_{k,\nu} = ||u||_k + \sum_{\ell \leq k} H_\nu(\nabla^\ell u) < \infty,$$

onde

$$H_\nu(\nabla^\ell u) = \sup\{\frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{|x-y|^\nu} :, x \neq y,\ x, y \in M\},$$

aqui y está numa vizinhança normal de x.

Proposição 1.5 *Se $k \geq 0$ inteiro, $0 < \nu < 1$, então*

$$C^{k,\nu}(M) \hookrightarrow C^k(M).$$

Prova: Os argumentos para a demonstração desse resultado consistem em tomarmos uma cobertura aberta finita para M e uma partição da unidade subordinada a essa cobertura. Reduzindo desta forma, o problema para o resultado análogo ao caso do $\mathbb{R}^n$.

Se $p \geq 1$, o espaço de Lebesgue $L^p(M)$ é o conjunto das funções localmente integráveis u em M ($u \in L^1_{loc}(M)$) para os quais a norma

$$||u||_p = (\int_M |u|^p dV)^{1/p}$$

é finita.

Essa norma é vista da seguinte forma: se $\{U_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ é uma cobertura finita de M e $\{(U_i, h_i),\ i = 1, \ldots, m\}$ são coordenadas locais, tomemos $\{\alpha_i\}$ a partição da unidade subordinada à cobertura U_i e $K_i \equiv \text{supp}\alpha_i \subset U_i$, K_i são compactos.

Daí, dizemos que $u \in L^p(M)$, se e somente se, $\alpha_i u \in L^p(M),\ \forall i$.

Além disso, $\alpha_i u \in L^p(M)$, se e somente se, $\alpha_i u \circ h_i^{-1} \in L^p(\mathbb{R}^N),\ \forall i$. Donde

$$||u||_p = (\int_M |u|^p dV)^{1/p} = (\sum_i \int_{h_i(K_i)} |\alpha_i u \circ h_i^{-1}|^p \sqrt{|g|} dx)^{1/p}.$$

Seja $u \in L^1_{loc}(M)$. A $k-$ésima derivada covariante fraca de u é uma função $\nabla^k_f u \in L^1_{loc}(M)$ satisfazendo

$$\int_M \nabla^k_f u \phi dV = (-1)^k \int_M u \nabla^k \phi dV,\ \phi \in \mathcal{D}(M),$$

onde $\mathcal{D}(M) = \{u \in C^\infty(M) : \text{supp}u \text{ compacto}\}$.

Em coordenadas locais, a derivada fraca de primeira ordem de u com relação à coordenada x_i, é a função $\partial_i u$ satisfazendo

$$\int_M \partial_i u \phi dV = -\int_M u \partial_i \phi dV,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(M).$$

Observe que a definição acima é natural pois em coordenadas locais $(U, h), x = x_i$ temos

$$\begin{aligned}\int_M \partial_i u\phi dV &= \int_{h(U)} \partial_i u(x_1, \ldots, x_n)\phi \circ h^{-1}\sqrt{|g|}dx_1.\ldots.dx_n \\ &= -\int_{h(U)} u \circ h^{-1}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(h^{-1}(x_1, \ldots, x_n))\sqrt{|g|}dx_1.\ldots.dx_n \\ &= -\int_M u\partial_i\phi dV.\end{aligned}$$

Para m inteiro não negativo e $1 \leq p < \infty$, define-se o espaço de Sobolev

$$W^{m,p}(M) = \{u \in L^p(M) : \ \nabla_f^\ell u \in L^p(M), \ \forall \ell \leq m\},$$

em que podemos usar a norma

$$||u||^p_{m,p} = \sum_{\ell=0}^{m} (\int_M |\nabla_f^\ell u|^p dV)^{1/p}.$$

Em particular, no caso $W^{1,2}(M) \equiv H^1(M)$ temos a norma e o produto interno dadas respectivamente por

$$||u||^2_{1,2} = \int_M |\nabla u|^2 dV + \int_M u^2 dV,$$

$$< u, v >_{1,2} = \int_M \nabla u.\nabla v dV + \int_M u.v dV,$$

vale lembrar que em coordenadas locais, $|\nabla u|^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\partial_i u \partial_j u$.

1.5 Desigualdade Isoperimétrica

Um problema clássico de desigualdade isoperimétrico é determinar um domínio de volume unitário no $I\!R^n$ tendo o menor perímetro. A solução deste problema é a bola B_R de centro na origem e raio R, onde $R = \omega_n^{-1/n}$ e ω_n é o volume da bola de raio 1, B_1, cujo perímetro é $\sigma_{n-1}\omega_n^{-\frac{n-1}{n}} = n\omega_n^{1/n}$, onde σ_{n-1} é o volume da esfera,S^{n-1}, em $I\!R^n$. Assim, todo domínio Ω com $\text{vol}(\Omega) = 1$, tem-se $\text{vol}(\partial\Omega) \geq n\omega_n^{1/n}$.

A desigualdade isoperimétrica, o qual é válida para todo domínio limitado regular, é dada por

$$(\text{vol}(\partial\Omega))^{n/(n-1)}c_n \geq n\text{vol}(\Omega), \quad c_n = (n\omega_n^{1/n})^{-n/(n-1)}.$$

Motivando assim, a desigualdade isoperimétrica

$$\text{existe constantes } C_i = C_i(p, n) > 0, i = 1, 2, \text{ tais que} \tag{1.13}$$
$$\int_M |\nabla u|^p dV \geq C_1 \int_M |u|^p dV, \quad 1 \leq p \leq n, \ u \in C_c^\infty(M)$$

(1.14) $\int_M |\nabla u|^p dV \geq C_2 (\int_M |u|^{\frac{np}{n-p}} dV)^{\frac{n-p}{n}}, \quad 1 \leq p < n, \ u \in C_c^\infty(M),$

aqui $C_c^\infty(M)$ denota o espaço das funções suave com supporte compacto em M. Note que se M é completo, $C_c^\infty(M)$ é denso em $W^{m,p}(M)$.

Em verdade, pode-se provar

(1.15)
$$\text{existe uma constante } C_p > 0 \text{ tal que}$$
$$\int_M |\nabla u|^p dV \geq C_p \int_M |u|^{p'} dV, \ 0 \neq u \in W^{1,p}(M) \quad \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Desta forma, transfere-se todos os resultados de imersões de Sobolev, regularidade, etc, vistos em abertos do $I\!R^n$ para uma variedade compacta M, cobrindo M com vizinhanças coordenadas, aplicando os resultados em $I\!R^n$ em coordenadas normais, e somando o resultado obtido através da partição da unidade. Na verdade, utilizando-se o método da "colagem".

Teorema 1.1 *(***Imersão de Sobolev para variedade compacta com ou sem bordo***) Seja M uma variedade compacta de dimensão n, (vale com fronteira C^1.)*

a) *Se $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{k}{n}$, então $W^{k,q}(M)$ está imerso continuamente em $L^r(M)$.*

b) *(***Rellich-Kondrakov***) A imersão acima é compacta, se a desigualdade é estrita.*

c) *Se $\alpha \in (0,1)$, e $\frac{1}{q} \leq \frac{k-\alpha}{n}$ então $W^{k,q}(M)$ está imerso continuamente em $C^\alpha(\overline{M})$.*

d) *Se $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{n-1}(\frac{n}{q} - k)$, então $W^{k,q}(M)$ está imerso continuamente em $L^s(\partial M)$.*

e) *A imersão acima é compacta, se a desigualdade é estrita.*

Para ilustrar a técnica de "colagem", reproduziremos logo abaixo a observação feita por Aubin de que em certo sentido a desigualdade de Sobolev numa variedade compacta vale com a mesma constante dada no caso usual.

Teorema 1.2 *Sejam M uma variedade riemanniana compacta com a métrica g, $p = \frac{2n}{n-2}$ e S a melhor constante de Sobolev em $I\!R^n$. Então para todo $\epsilon > 0$ existe uma constante C_ϵ tal que*

$$||\phi||_p^2 \leq (1+\epsilon) S \int_M |\nabla \phi|^2 dV_g + C_\epsilon \int_M \phi^2 dV_g, \ \forall \phi \in C^\infty(M).$$

Prova. Fixe $\epsilon > 0$. Para cada $P \in M$, escolhemos uma vizinhança U tal que, em coordenadas normais em U, os autovalores de g_{jk} estão entre $(1+\epsilon)^{-1}$ e $(1+\epsilon)$, além disso, $dV_g = f dx$, onde $(1+\epsilon)^{-1} < f < (1+\epsilon)$. Ou seja, tome vizinhanças suficientemente pequenas de modo que $(1+\epsilon)^{-1} < \sqrt{\det g_{jk}} < (1+\epsilon)$ e $(1+\epsilon)^{-1} I < g_{jk} < (1+\epsilon) I$. Escolha agora uma subcobertura finita $\{U_i\}$ e uma partição da unidade subordinada a esta cobertura, o qual podemos denotar por $\{\alpha_i^2\}$, onde $\alpha_i \in C^\infty(M)$ e $\sum_i \alpha_i^2 = 1$. Então temos

$$\begin{aligned}
||\phi||_p^2 &= ||\phi^2||_{p/2} = ||\sum_i \alpha_i^2 \phi^2||_{p/2} \\
&\leq \sum_i \left(\int_M |\alpha_i \phi|^p dV_g\right)^{2/p} \\
&\leq (1+\epsilon)^{2/p} \sum_i \left(\int_{U_i} |\alpha_i \phi|^p dx\right)^{2/p} \\
&\leq (1+\epsilon)^{2/p} S \sum_i \left(\int_{U_i} |\nabla(\alpha_i \phi)|_o^2 dx\right),
\end{aligned}$$

onde $|\cdot|_o$ denota a métrica euclidiana em coordenadas normais. Observe que se $(1+\epsilon)^{-1} I < g_{jk} < (1+\epsilon) I$ então $(1+\epsilon)^{-1} I < g^{jk} < (1+\epsilon) I$. E daí para cada i temos

$$\int_{U_i} |\nabla(\alpha_i \phi)|_o^2 dx \leq (1+\epsilon)^2 \int_{U_i} |\nabla(\alpha_i \phi)|^2 dV_g.$$

Note agora que

$$\begin{aligned}
|\nabla(\alpha_i \phi)|^2 &= \alpha_i^2 |\nabla \phi|^2 + 2\alpha_i \phi \nabla \alpha_i \nabla \phi + \phi^2 \nabla \alpha_i^2 \\
&\leq (1+\epsilon) \alpha_i^2 |\nabla \phi|^2 + (1+\epsilon^{-1}) \phi^2 |\nabla \alpha_i|^2,
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade $2ab \leq \epsilon a^2 + \epsilon^{-1} b^2$. Assim para ϵ pequeno temos

$$\begin{aligned}
||\phi||_p^2 &\leq (1+\epsilon)^4 S \sum_i \int_{U_i} \alpha_i^2 |\nabla \phi|^2 dV_g + C_\epsilon \sum_i \int_{U_i} \phi^2 |\nabla \alpha_i|^2 dV_g \\
&\leq (1+\epsilon)^4 S \int_M |\nabla \phi|^2 dV_g + C C_\epsilon \int_M \phi^2 dV_g.
\end{aligned}$$

Isso prova a desigualdade.

1.6 Regularidade e o princípio de máximo

Começaremos introduzindo a noção de solução fraca. Considere o problema básico linear

(1.16) $$\Delta_g u + a(x) u = f(x), \; x \in M,$$

onde $a, f : M \rightarrow I\!R$ são função dadas.

Solução fraca. Uma função $u \in H^1(M)$ é dita ser solução fraca de (1.16) quando

$$\int_M < \nabla u, \nabla \phi >_g dV_g + \int_M au\phi dV_g - \int_M f\phi dV_g = 0, \ \forall \phi \in H^1(M).$$

Como no caso euclidiano, um resultado de regularidade muito usado é:

Se a é regular e $f \in W^{k,p}(M)$ para algum $k \in I\!N$ e $p > 1$, então a solução fraca u de (1.16) está em $W^{k+2,p}(M)$.

E daí, esse resultado junto com a imersão de Sobolev, segue-se que se f é regular então u é regular. Mais exatamente, esses resultados seguem dos teoremas de regularidade. Podemos ver que, com o procedimento de colagem, os resultados abaixo podem ser formulados num contexto de uma variedade compacta.

Teorema 1.3 *(**Regularidade local**) Seja Ω um aberto do $I\!R^n$. Δ denota o laplaciano em relação a qualquer métrica sobre Ω, e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma solução fraca para $\Delta u = f$.*

a) *(**Estimativa** L^q) Se $f \in W^{k,q}(\Omega)$, então $u \in W^{k+2,q}(\Omega_o)$, para todo compacto $\Omega_o \subset \Omega$. Se $u \in L^q(\Omega)$ então*

$$||u||_{W^{k+2,q}(\Omega_o)} \leq C(||\Delta u||_{W^{k,q}(\Omega)} + ||u||_{L^q(\Omega)}).$$

b) *(**Estimativa de Schauder**) Se $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, então $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega_o)$, para todo compacto $\Omega_o \subset \Omega$. Se $u \in C^{\alpha}(\Omega)$ então*

$$||u||_{C^{k+2,\alpha}(\Omega_o)} \leq C(||\Delta u||_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + ||u||_{C^{\alpha}(\Omega)}).$$

Teorema 1.4 *(**Regularidade Global**) Sejam M uma variedade riemanniana compacta e Δ denota o laplaciano. Considere $u \in L^1_{loc}(M)$ uma solução fraca para $\Delta u = f$.*

a) *Se $f \in W^{k,q}(M)$, então $u \in W^{k+2,q}(M)$, e*

$$||u||_{W^{k+2,q}(M)} \leq C(||\Delta u||_{W^{k,q}(M)} + ||u||_{L^q(M)}).$$

b) *Se $f \in C^{k,\alpha}(M)$, então $u \in C^{k+2,\alpha}(M)$, e*

$$||u||_{C^{k+2,\alpha}(M)} \leq C(||\Delta u||_{C^{k,\alpha}(M)} + ||u||_{C^{\alpha}(M)}).$$

O resultado abaixo segue-se facilmente do princípio de máximo de Hopf.

Teorema 1.5 *(**Princípio de máximo Forte**) Se h é uma função não negativa, regular definida numa variedade conexa M, e $u \in C^2(M)$ satisfaz $(\Delta + h)u \geq 0$. Se u atinge o seu mínimo $m \leq 0$, então u é constante em M.*

Finalizamos essa seção provando o seguinte

Teorema 1.6 *Seja $M = (M, g)$ uma variedade riemanniana regular compacta, orientável e sem bordo, e $f : M \to I\!R$ uma função regular. A equação de Laplace $\Delta_g u = f$ possui uma solução regular se, e somente se, $\int_M f dV_g = 0$. Além disso, a solução é única, a menos de uma constante.*

Prova. Note que a condição média zero é necessária. De fato, basta integrar a equação de Laplace, vem

$$\int_M f dV_g = \int_M \Delta_g u dV_g = -\int_{\partial M} \omega(N) dV_{\tilde{g}} = 0,$$

onde $\tilde{g}$ é a métrica induzida sobre ∂M, N é o vetor normal exterior e ω denota o volume da esfera unitária.

Provaremos agora que a condição média zero é suficiente. Defina

$$\mathcal{H} = \{u \in H^1(M) : \int_M u dV_g = 0 \text{ e } \int_M f u dV_g = 1\}$$

e

$$\mu = \inf_{u \in \mathcal{H}} \int_M |\nabla u|^2 dV_g.$$

É claro que $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Considere uma seqüência minimizante $(u_i) \in \mathcal{H}$ para μ, ou seja, $u_i \in \mathcal{H}$ para todo i e

$$\lim_{i \to +\infty} \int_M |\nabla u_i|^2 dV_g = \mu.$$

Agora, usando por exemplo, a desigualdade de Poincaré (1.15), existe uma constante $A > 0$ tal que se $u \in H^1(M)$ e tem média zero, segue-se que

$$\int_M u^2 dV_g \leq A \int_M |\nabla u|^2 dV_g.$$

Sendo (u_i) uma seqüência minimizante, temos que (u_i) é limitada em $H^1(M)$. Uma vez que $H^1(M)$ é um espaço reflexivo, e a imersão $H^1(M) \subset L^2(M)$ é compacta, então existe $u \in H^1(M)$ e uma subseqüência de u_i, ainda denotado por u_i, tal que

$$u_i \rightharpoonup u \text{ (fracamente) em } H^1(M), \quad u_i \to u \text{ em } L^2(M).$$

Da última convergência segue-se que $u \in \mathcal{H}$. Da primeira convergência, temos

$$||u||^2 = \int_M |\nabla u|^2 dV_g \leq \liminf ||u_i|| = \mu.$$

Portanto

$$\int_M |\nabla u|^2 dV_g = \mu,$$

e μ é atingido.

Agora, usando o Teorema do multiplicador de Lagrange, existem constantes (multiplicadores de Lagrange) α e β, tais que

$$\int_M < \nabla u, \nabla \phi >_g dV_g = \alpha \int_M \phi dV_g + \beta \int_M f \phi dV_g, \quad \forall \phi \in H^1(M).$$

Tomando $\phi = 1$ segue-se que $\alpha = 0$. Escolhendo $\phi = u$, obtemos $\beta = \mu$. Logo u é solução fraca da equação

$$\Delta_g u = \mu f.$$

Da teoria de regularidade, segue-se que u é regular. Donde $\mu^{-1}u$ é então a solução desejada.

Provaremos agora a unicidade. Se u e v são duas soluções da equação de Laplace, então $\Delta_g(v-u) = 0$. Multiplicando essa equação por $v-u$, e integrando sobre M, temos

$$\int_M |\nabla(v-u)|^2 dV_g = 0$$

Portanto, $v - u$ é uma constante, e isso termina a prova.

2 O problema de Yamabe

Vimos no final da seção anterior que o ponto fundamental foi o fato de a imersão de Sobolev $H^1(M)$ em $L^2(M)$ ser compacta. Discutiremos agora o Problema de Yamabe, um problema que na literatura, as vezes, é denominado problema elíptico com expoente crítico de Sobolev. O objetivo do problema de Yamabe é provar, a menos de mudança conforme da métrica, que sempre existe uma métrica para o qual a curvatura escalar é constante. Esse problema foi anunciado em 1690 por Yamabe em [22]. Cerca de 8 anos depois, Trudinger [21] descobriu um erro na prova do resultado de Yamabe, provando o resultado de Yamabe para o caso em que o número $\lambda(M) \equiv \mu_g$ (definida adiante, as vezes denominada de invariante da classe conforme da variedade (M, g)) satisfaz $\lambda(M) \leq 0$. Mais exatamente, ele prova a conjectura de Yamabe, quando existir uma constante positiva $\alpha(M)$ tal que $\lambda(M) < \alpha(M)$. Aubin em [5], estende o resultado de [21], para alguns casos, com M satisfazendo a desigualdade $\lambda(M) < \alpha(S^n) = n(n-2)\mathrm{vol}(S^n)^{2/n}$. Finalmente, Schoen [18] prova completamente a conjectura de Yamabe quando a variedade é compacta e λ é constante. Gostaria de citar as referências [12, 15] e [17] para uma leitura mais aprofundada sobre esse problema.

2.1 Operador versus métrica

Nessa seção deduziremos a relação entre o operador de Laplace-Beltrami associada à métrica g com as curvaturas escalares das métricas g e $\tilde{g}$, denotadas por S_g e $S_{\tilde{g}}$ respectivamente, onde $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$ é a métrica conforme à g, em que $u : M \to I\!R$ é uma função regular.

Mais especificamente provaremos que a equação abaixo possui uma solução regular u,

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}, \ u \in C^\infty(M). \tag{2.17}$$

Formalmente, duas métricas são conformes, quando existir uma função $\phi > 0$ em M tal que $\tilde{g} = \phi g$.

Portanto o problema de Yamabe consiste em provar que, a menos de mudança conforme das métricas, existe sempre uma métrica de curvatura escalar constante, ou seja

Problema de Yamabe-Formulação geométrica. Para toda variedade compacta riemanniana (M, g) de dimensão $n, \ n \geq 3$, existe uma métrica conforme à g, denotada por $\tilde{g}$ de curvatura escalar constante.

Problema de Yamabe-Formulação EDP Para toda variedade compacta riemanniana (M, g) de dimensão $n, \ n \geq 3$, existem $u \in C^\infty(M), \ u > 0$ em M e $\lambda \in I\!R$ tal que

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{2.18}$$

Note que se u e λ satisfazem (2.18), e se $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}$, obtemos a relação

$$S_{\tilde{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2} \lambda.$$

Provaremos (2.18). Seja $\phi = u^{4/(n-2)}, \ u > 0$. Chame $r = 4/(n-2)$, e portanto $\tilde{g} = u^r g$, ou seja $\tilde{g}_{ij} = u^r g_{ij}, \ 1 \leq i, j \leq n$. Fazendo $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, e usando a expressão dos símbolos de Christoffel em termos da métrica, vem

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^\ell_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_i^n (\partial_i \tilde{g}_{kj} + \partial_j \tilde{g}_{ki} - \partial_k \tilde{g}_{ij}) \tilde{g}^{k\ell} \\
&= \frac{1}{2} \sum_i^n (\partial_i(u^r g_{kj}) + \partial_j(u^r g_{ki}) - \partial_k(u^r g_{ij})) \ g^{k\ell} u^{-r} \\
&= \frac{1}{2} \sum_i^n (\partial_i(u^r) g_{kj} + u^r \partial_i g_{kj} + \partial_j(u^r) g_{ki} + u^r \partial_j g_{ki}) \ g^{k\ell} u^{-r} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_i^n (\partial_k(u^r) g_{ij} + u^r \partial_k g_{ij}) \ g^{k\ell} u^{-r} \\
&= r u^{r-1} \frac{1}{2} \sum_i^n (\partial_i u g_{kj} + \partial_j u g_{ki} - \partial_k u g_{ij}) \ g^{k\ell} u^{-r}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i}^{n}(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})\ g^{k\ell}$$

Portanto

(2.19) $$\tilde{\Gamma}_{ij}^{\ell} = \Gamma_{ij}^{\ell} + \frac{1}{2}ru^{-1}(\delta_{j\ell}\partial_i u + \delta_{i\ell}\partial_j u - \sum_k g_{ij}g^{k\ell}\partial_k u).$$

Agora da expressão da curvatura $S_{\tilde{g}}$ em termos de componentes (1.3), obtemos

(2.20) $$S_{\tilde{g}} = \sum_{ijk}\tilde{g}^{ik}\tilde{R}_{ikj}^{j},$$

onde

$$R_{ikj}^{j} = \partial_k\Gamma_{ji}^{j} - \partial_j\Gamma_{ki}^{j} + \Gamma_{km}^{j}\Gamma_{ji}^{m} - \Gamma_{jm}^{j}\Gamma_{ki}^{m}.$$

Donde

$$S_{\tilde{g}} = \sum_{ijk}u^{-r}g^{ik}(\partial_j\tilde{\Gamma}_{ik}^{j} - \partial_k\tilde{\Gamma}_{ij}^{j} + \sum_s\tilde{\Gamma}_{js}^{j}\tilde{\Gamma}_{ik}^{s} - \sum_s\tilde{\Gamma}_{ks}^{j}\tilde{\Gamma}_{ij}^{s}).$$

Substituindo (2.19) na expressão acima vem,

$$\begin{aligned}
S_{\tilde{g}} = &\\
&\sum_{ijk}u^{-r}g^{ik}(\partial_j(\Gamma_{ik}^{j} + \frac{1}{2}ru^{-1}(\delta_{kj}\partial_i u + \delta_{ij}\partial_k u - \sum_m g_{ik}g^{mj}\partial_m u)) -\\
&\partial_k(\Gamma_{ij}^{j} + \frac{1}{2}ru^{-1}(\delta_{jj}\partial_i u + \delta_{ij}\partial_j u - \sum_m g_{ij}g^{mj}\partial_m u)) -\\
&\sum_s(\Gamma_{js}^{j} + \frac{1}{2}ru^{-1}(\delta_{sj}\partial_j u + \delta_{jj}\partial_s u - \sum_p g_{js}g^{pj}\partial_p u)) \cdot\\
&(\Gamma_{ik}^{s} + \frac{1}{2}ru^{-1}(\delta_{ks}\partial_i u + \delta_{is}\partial_k u - \sum_m g_{ik}g^{ms}\partial_m u)) -\\
&\sum_s(\Gamma_{ks}^{j} + \frac{1}{2}ru^{-1}(\delta_{sj}\partial_k u + \delta_{kj}\partial_s u - \sum_m g_{ks}g^{mj}\partial_m u)) \cdot\\
&(\Gamma_{ij}^{s} + \frac{1}{2}ru^{-1}(\delta_{js}\partial_i u - \delta_{is}\partial_j u - \sum_\ell g_{ij}g^{\ell s}\partial_\ell u)).
\end{aligned}$$

Usando (2.20), a expressão do Laplaciano (1.7) e levando-se em conta que $\sum_k g_{ik}g^{kj} = \delta_{ij}$, chegamos que u satisfaz a equação em (2.18).

2.2 Caso subcrítico

Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta de dimensão ≥ 3. Considere o funcional $I : H^1(M) \to I\!R$ definida por

$$I(u) = \int_M |\nabla u|_g^2 dV_g + \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M S_g u^2 dV_g.$$

Para $q \in (2, \frac{2n}{n-2})$, seja $\mathcal{H}_q \subset H^1(M)$ dada por

$$\mathcal{H}_q = \{u \in H^1(M) : \int_M |u|^q dV_g = 1\}.$$

Provaremos o seguinte resultado de Yamabe, no caso subcrítico. Vale ressaltar que a idéia original do Yamabe foi provar que a seqüência de soluções u_i^q no caso subcrítico, ou seja, quando $q < \frac{2n}{n-2}$, converge para uma solução u no caso crítico, quando q se aproxima de $\frac{2n}{n-2}$.

Teorema 2.1 *Seja (M, g) uma variedade compacta riemanniana de dimensão ≥ 3. Dado $q \in (2, \frac{2n}{n-2})$, seja*

$$\lambda_q = \inf_{u \in \mathcal{H}_q} I(u).$$

Então existe uma solução $u = u_q \in C^\infty(M),\ u > 0$, da equação(subcrítica)

$$(PYS) \qquad \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda_q u^{q-1}$$

com propriedade adicional $\int_M u^q dV_g = 1$. Em particular, λ_q é finito e ela é atingida pela função u.

Prova. A prova será feita através de várias etapas

Etapa 1. λ_q é finita.

Como cada $u \in \mathcal{H}_q$ tem norma 1 em L^q, pela desigualdade de Hölder temos

$$|\int_M S_g u^2 dV_g| \leq \max_M |S_g| V_g^{q-2/q},$$

onde V_g denota o volume de M com relação à métrica g. E daí,

$$I(u) \geq -\max_M |S_g| V_g^{q-2/q},$$

assim λ_q é finito.

Etapa 2. Existe $u = u_q \in H^1(M),\ u \geq 0$, que atinge o ínfimo λ_q.

Seja então (v_i) uma seqüência minimizante para λ_q. Em outras palavras, $v_i \in \mathcal{H}_q,\ \forall i$, e $I(v_i) \to \lambda_q$, quando $i \to \infty$. Trocando, se necessário for, v_i por $|v_i|$, podemos assumir que $v_i \geq 0,\ \forall i$. Note que (v_i) é limitada em $H^1(M)$, e assim como $H^1(M)$ é um espaço reflexivo e do teorema de imersão de Sobolev (Teorema de Rellich-Kondrakov), segue-se que existe $u = u_q \in H^1(M)$ tal que, a menos de subseqüências,

1) $v_i \to u$ em $L^q(M)$ (também em $L^2(M)$ e q.s.).

2) $v_i \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(M)$.

Como $v_i \geq 0$, $\forall i$, da convergência q.s. segue-se que $u \geq 0$. De **2)** obtemos que

$$||u|| \leq \liminf_{t\to\infty} ||v_i||.$$

De **1)** concluímos

$$I(u) \leq \lim_{i\to\infty} I(v_i) = \lambda_q.$$

Além disso, usando **1)** novamente, temos que $u \in \mathcal{H}_q$. E daí da definição de λ_q segue-se que u assume o ínfimo.

Etapa 3. $u = u_q$ é uma solução regular do problema (PYS).

Como $I(u) = \lambda_q$, do Teorema do multiplicador de Lagrange existe uma constante α tal que para todo $\phi \in H^1(M)$, temos

$$\int_M < \nabla u, \nabla \phi > dV_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u \phi dV_g = \alpha \int_M u^{q-1} \phi dV_g.$$

Tomando $\phi = u$, segue-se que $\alpha = \lambda_q$. Portanto u é solução fraca não negativa de (PYS). A questão da regularidade da solução é obtida através de um argumento denominado bootstrap, baseado nos resultados de imersões de Sobolev, Schauder e teorema de regularidade local. Basicamente, o lado direito u^{q-1} está num espaço $L^p(M)$, para algum p, donde pela regularidade local, u está em $W^{2,p}(M)$. Pelo teorema de imersão de Sobolev, u^{q-1} está num maior espaço $L^p(M)$, e procedendo-se assim, da teoria de regularidade, u está em $W^{2,p}(M)$. Novamente da imersão de Sobolev chegamos que $u \in C^2(M)$. Como $u \geq 0$ em M, do princípio do máximo concluímos que u é positivo em M. Da teoria de regularidade, fazendo interações se necessário for, chegamos que $u \in C^\infty(M)$.

2.3 Caso geral

Trataremos o problema de Yamabe no caso crítico. Começaremos estudando algumas propriedades invariantes.

Seja $\mathcal{H}$ definida por

$$\mathcal{H} = \{u \in H^1(M) : \int_M |u|^{2^*} dV_g = 1\}, \quad 2^* = \frac{2n}{n-2},$$

e μ_g pondo

$$\mu_g = \inf_{u\in\mathcal{H}} I(u),$$

onde

$$I(u) = \int_M |\nabla u|_g^2 dV_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u^2 dV_g.$$

Afirmamos que o número μ_g é conformal invariante, ou seja,

Lema 2.1 *Se g e $\tilde{g}$ são duas métricas conformes, ou seja $\tilde{g} = v^{4/(n-2)}g$ para algum $v \in C^\infty(M)$, então $\mu_g = \mu_{\tilde{g}}$.*

Prova. A prova segue calculando diretamente. Note que $\tilde{g} = v^{4/(n-2)}g$ para algum $v \in C^\infty(M)$, então $dV_{\tilde{g}} = v^{2n/(n-2)}dV_g$. Portanto,

$$\int_M |u|^{2n/(n-2)} dV_{\tilde{g}} = \int_M |uv|^{2n/(n-2)} dV_g.$$

Por outro lado, da invariança conforme do laplaciano, temos

Afirmação. Se $\tilde{g} = v^{4/(n-2)}g$, para algum $v \in C^\infty(M)$, é uma métrica conforme à métrica g, então $\forall u \in C^\infty(M)$,

$$\Delta_{\tilde{g}} u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} u = v^{-(n+2)/(n-2)}(\Delta_g uv + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g uv).$$

Assumindo a afirmação, vem

$$I_{\tilde{g}}(u) = I_g(uv),$$

onde os índices g e $\tilde{g}$ significam que o funcional do lado esquerdo deve ser considerado com relação à métrica $\tilde{g}$ e aquela do lado direito com relação à g. Isso prova o Lema 2.1.

Verificação da Afirmação. Para simplificar a notação, chamemos $p = \frac{2n}{n-2}$ e $G = \det(g_{ij})$. Então $\sqrt{\tilde{G}} = v^p\sqrt{G}$, onde $\tilde{G} = \det\tilde{g}$. Portanto

$$\begin{aligned}
\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) &= \frac{1}{v^p\sqrt{G}} \partial_i(\sqrt{G} g^{ij} v^2 \partial_j(v^{-1}u)) \\
&= \frac{-1}{v^p\sqrt{G}} \partial_i(\sqrt{G} g^{ij} u v_{x_j}) + \frac{1}{v^p\sqrt{G}} \partial_i(\sqrt{G} g^{ij} v u_{x_j}) \\
&= \frac{-u}{v^p\sqrt{G}} \partial_i(\sqrt{G} g^{ij} v_{x_j}) + \frac{1}{v^{p-1}\sqrt{G}} \partial_i(\sqrt{G} g^{ij} u_{x_j}).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) = -\frac{u}{v^p}\Delta_g v + \frac{1}{v^{p-1}}\Delta_g u. \tag{2.21}$$

Logo a expressão acima junto com (2.17) vem

$$\begin{aligned}
& v^{p-1}(\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}}(v^{-1}u)) \\
&= -uv^{-1}\Delta_g v + \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} u v^{p-2} \\
&= -uv^{-1}\Delta_g v + \Delta_g u + \\
&\quad + \frac{n-2}{4(n-1)}\Big(\frac{\Delta_g v + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g v}{v^{p-1}\frac{n-2}{4(n-1)}}\Big) u v^{p-2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -uv^{-1}\Delta_g v + \Delta_g u + \frac{\Delta_g v + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g v}{v} u \\
&= \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}}(v^{-1}u) = v^{-(p-1)}(\Delta_g(v^{-1}u) + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(v^{-1}u)),
$$

e fazendo uma mudança de variáveis, chegamos a conclusão da prova da afirmação.

Observação 2.1 *Quando $n = 2$, o teorema de Gauss-Bonnet (vide p.e. [8] ou [20]) nos dá uma relação entre o sinal da curvatura escalar com o sinal de uma propriedade topológica, característica de Euler de M, denotada por $\chi(M)$, da seguinte forma*

$$
\chi(M) = \frac{1}{4\pi} \int_M S_g dV_g.
$$

No caso $n \geq 3$, o sinal da curvatura está relacionado com o número μ_g (invariante de Yamabe), conforme o teorema abaixo.

Teorema 2.2 *Seja (M, g) uma variedade riemanniana regular compacta de dimensão $n \geq 3$. Então*

$$
\begin{aligned}
\mu_g > 0 &\iff \exists \tilde{g} \in [g], \quad S_{\tilde{g}} > 0 \\
\mu_g = 0 &\iff \exists \tilde{g} \in [g], \quad S_{\tilde{g}} = 0 \\
\mu_g < 0 &\iff \exists \tilde{g} \in [g], \quad S_{\tilde{g}} < 0,
\end{aligned}
$$

onde $\tilde{g} \in [g]$ significa que $\tilde{g}$ é uma métrica conforme à métrica g, e $S_{\tilde{g}} > 0$(respectivamente $S_{\tilde{g}} = 0$ e $S_{\tilde{g}} < 0$) significa que a relação é válida em todos os pontos de M. Em particular, não podemos obter duas métricas conforme com curvaturas escalares de sinais distintos.

Prova. Começaremos provando a seguinte relação envolvendo o funcional de Hilbert, a saber,

$$
\mathcal{F}(g) = \int_M S_g dV_g.
$$

Então

$$
\mu_g = \frac{n-2}{4(n-1)} \inf_{\tilde{g} \in [g]} V_{\tilde{g}}^{-\frac{n-2}{n}} \int_M S_{\tilde{g}} dV_{\tilde{g}}, \tag{2.22}
$$

onde $V_{\tilde{g}}$ denota o volume de M com relação à métrica $\tilde{g}$.

Verificação. Pela densidade prova se para $u \in C^\infty(M), u \geq 0$. Seja $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$ métrica conforme à g. Como

$$
dV_g = \sqrt{\det g}\; dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge x_n,
$$

então

$$dV_{\tilde{g}} = u^{2n/(n-2)}dV_g \quad \text{e} \quad V_{\tilde{g}} = \int_M u^{2n/(n-2)}dV_g = 1.$$

Multiplicando por u a equação que relaciona as curvaturas escalares das métricas conforme (2.17), e integrando sobre M, vem

$$I(u) = \frac{n-2}{4(n-2)}\int_M S_{\tilde{g}}dV_{\tilde{g}},$$

finalizando a verificação.

Provaremos agora o nosso teorema 2.2, mais exatamente, mostraremos apenas a primeira implicação (as outras seguem analogamente). Note que como M é uma variedade sem bordo, integrando sobre M a identidade (2.17) temos que S_g e $S_{\tilde{g}}$ possuem o mesmo sinal, ou ambos são nulos. Assim da identidade (2.22) e da observação acima prova-se o teorema.

2.4 Problema de Yamabe: caso nulo e negativo

Provaremos nessa parte um resultado provado independentemente por Aubin, Trudinger e Aubin.

Teorema 2.3 *Seja (M, g) uma variedade riemanniana regular e compacta de dimensão $n \geq 3$. Suponha que o invariante de Yamabe μ_g é não positivo, então existe uma solução u, positiva e regular, da equação*

$$(E) \qquad \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)}S_g u = \mu_g u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

e tal que $\int_M u^{\frac{2n}{n-2}}dV_g = 1$. Em particular, μ_g é assumido pela função u. Além disso, o métrica conforme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ tem curvatura escalar constante, a saber $S_{\tilde{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2}\mu_g$.

Prova. Note que o caso $\mu_g = 0$ decorre imediatamente do teorema 2.2. Suponha $\mu_g < 0$. O ponto crucial é provar que u_q são uniformemente limitadas, onde $u_q > 0$ soluções de (PYS), $q < \frac{n+2}{n-2}$.

Afirmação 1. Existe $\epsilon_o > 0$ tal que $\lambda_q < -\epsilon_o$, $\forall q < \frac{n+2}{n-2}$.

Verificação. Segue-se da Afirmação 3 abaixo.

Afirmação 2. Existe $A > 0$ tal que $\lambda_q > -A$, $\forall q < \frac{n+2}{n-2}$.

Verificação. Segue-se da Afirmação 3 abaixo.

Tome um $x_o \in M$ onde u_q é máximo. Então $\Delta_g u_q(x_o) \geq 0$, e de (PYS) obtemos

$$\frac{n-2}{4(n-1)}S_g(x_o)u_q(x_o) \leq \lambda_q u_q^{q-1}(x_o).$$

Portanto, $S_g(x_o) < 0$, e

$$u_q^{q-2}(x_o) \leq \frac{n-2}{4\epsilon_o(n-1)} \max_{x\in M} |S_g(x_o)|.$$

Logo (u_q) é uniformemente limitada. Da teoria elíptica, conclui-se que (u_q) é limitada em $W^{2,p}(M)$, $\forall p > 1$. Da imersão de Sobolev (compacta), chega-se que existe uma sub-seqüência de u_q, denotada por u_q, tal que $u_q \longrightarrow u$ em $C^1(M)$, com $u \geq 0$, quando $q \to \frac{2n}{n-2}$.

Afirmação 3. $\lambda_q \longrightarrow \mu_q, \quad q \to \frac{2n}{n-2}$.

Verificação. Como $\int_M u_q^q dV_g = 1$, da desigualdade de Hölder, temos

$$C_q \int_M u_q^{2n/(n-2)} dV_g \geq 1, \quad 2^* = \frac{2n}{n-2}, \quad \lim_{q\to 2^*} C_q = 1.$$

Assim

$$\limsup_{q\to 2^*} \int_M u_q^{2n/(n-2)} dV_g \geq 1.$$

Novamente, como $\int_M u_q^q dV_g = 1$, obtemos

$$\mu_g (\int_M u_q^{2n/(n-2)} dV_g)^{(n-2)/n} \leq \lambda_q.$$

Sendo $\mu_g < 0$, segue-se que

$$\liminf_{q\to 2^*} \lambda_q \geq \mu_q. \tag{2.23}$$

Para provar a desigualdade reversa, seja $\epsilon > 0$ dado, e seja $u \in H^1(M)$ de norma 1 em $L^{2^*}(M)$ tal que $I(u) \leq \mu_g + \epsilon$. Notando que a norma L^q de u converge a 1, quando $q \to 2^*$, obtemos

$$\limsup_{q\to 2^*} \lambda_q \leq I(u) \leq \mu_g + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, segue-se

$$\limsup_{q\to 2^*} \lambda_q \leq \mu_g. \tag{2.24}$$

Portanto, de (2.23) e (2.24), a verificação da Afirmação 3 está completada.

Da Afirmação 3, e passando o limite em (PYS), quando $q \to \frac{2n}{n-2}$, temos que u é solução fraca de (E). Pela teoria de regularidade u é regular. Pelo princípio de máximo, temos que $u = 0$ ou $u > 0$.

Da convergência $C^0(M)$, e como $\int_M u_q^{2n/(n-2)} dV_g = 1$ temos que $\int_M u^{2n/(n-2)} dV_g = 1$. Donde, em particular, $u \neq 0$. Portanto $u > 0$ em M.

2.5 Problema de Yamabe: caso positivo

Trataremos o caso delicado do problema de Yamabe, a saber, quando a invariante de Yamabe é positivo. Este é o caso onde é exigido a melhor constante de Sobolev da imersão $H^1(M)$ em $L^{2^*}(M)$, a saber,

$$K = K(n,2) = \sqrt{\frac{4}{n(n-2)}\omega_n^{2/n}}, \ \omega_n \text{ é o volume da esfera unitária } S^{n-1},$$

o qual foi computada independentemente por Aubin [4] e Talenti [19]. Veremos que o ponto crucial é provar que uma solução fraca é não nula.
O resultado a seguir foi obtido pelo Aubin em [5].

Teorema 2.4 *Seja (M,g) uma variedade riemanniana regular e compacta de dimensão $n \geq 3$. Suponha que o invariante de Yamabe μ_g satisfaz a desigualdade*

$$(*) \qquad \mu_g < K(n,2)^{-2}.$$

Então existe uma solução u, positiva e regular, da equação

$$(E) \qquad \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \mu_g u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

e tal que $\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dV_g = 1$. Em particular, μ_g é assumido pela função u. Além disso, a métrica conforme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ tem curvatura escalar constante, a saber $S_{\tilde{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2}\mu_g$.

Prova. A prova será em várias etapas. Basta considerar o caso $\mu_g > 0$.

Etapa 1. $\lambda_q \longrightarrow \mu_q, \quad q \to \frac{2n}{n-2}$.

Verificação. A prova é feita como na prova da Afirmação 3 acima.

Etapa 2. (u_q) é limitada em $H^1(M)$.

Verificação. Como $\int_M u_q^q dV_g = 1$, então (u_q) é limitada em $L^2(M)$. E daí

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla u_q|^2 dV_g &= \lambda_q - \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u_q^2 dV_g \\ &\leq \lambda_q + \frac{n-2}{4(n-1)} (\max_{x \in M} |S_g(x)|) \int_M u_q^2 dV_g. \end{aligned}$$

Então $|\nabla u_q|$ é limitada em $L^2(M)$. Isso prova a Etapa 2.

Da Etapa 2, existe $u \in H^1(M)$ tal que, a menos de uma sub-seqüência, têm-se

i) $u_q \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(M)$.

ii) $u_q \to u$ em $L^2(M)$, q.s. em M,

quando $q \to 2^*$.

Provaremos agora que u é uma solução fraca de (E). De fato, como $u_q \geq 0$, de **(ii)** segue-se que $u \geq 0$. Note que pela imersão de Sobolev, temos u_q^{q-1} é limitada em $L^{2^*/(2^*-1)}(M)$. Assim, quando $q \to 2^*$, vem

$$u_q^{q-1} \to u^{2^*-1}, \quad \text{fracamente em } L^{2^*/(2^*-1)}(M).$$

Por outro lado, como u_q é solução de (PYS), segue-se que para todo $\phi \in H^1(M)$, tem-se

$$\int_M < \nabla u_q, \nabla \phi > dV_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u_q \phi dV_g = \lambda_q \int_M u_q^{q-1} \phi dV_g.$$

Mas o dual de $L^{2^*/(2^*-1)}(M)$ é $L^{2^*}(M)$. E daí, $\forall \phi \in H^1(M)$, da Etapa 1 e passando o limite na relação acima, vem

$$\int_M < \nabla u, \nabla \phi > dV_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u \phi dV_g = \mu_g \int_M u^{2^*-1} \phi dV_g,$$

ou seja, u é uma solução fraca de (E).

Etapa 3. u é uma solução regular ($u \in C^\infty(M)$), logo solução forte de (E).

Verificação. Basta provar que existe r tal que $u \in L^r(M), \quad r > 2^*$. De fato, se $u \in L^r(M)$, então $\frac{n-2}{4(n-1)} S_g u - \mu_g u^{\frac{n+2}{n-2}} \in L^p(M),\ p = r/(2^*-1)$. Da teoria da regularidade segue-se $u \in W^{2,p}(M)$. Usando a Imersão de Sobolev, podemos colocar u num $L^{p'}(M),\ p' > p$. Iterando o procedimento chegamos que $u \in W^{2,p}(M), \forall p > 1$. Usando novamente a Imersão de Sobolev, concluímos que $u \in C^\alpha(M)$, para algum $\alpha > 0$. Agora, o Teorema de Schauder implica que $u \in C^{2,\alpha}(M)$. Fazendo iterações, por exemplo como $u^{2^*} \in C^{2,\alpha}(M)$, da teoria de regularidade e da imersão de Sobolev, obtemos que $u \in C^\infty(M)$.

A prova de que existe r tal que $u \in L^r(M), \quad r > 2^*$, devido a Trudinger[21], é bem trabalhosa.

Verificação. Seja $u \in H^1(M)$ a solução fraca de (E), então para todo $\phi \in H^1(M)$, tem-se

$$\int_M < \nabla u, \nabla \phi > dV_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u \phi dV_g = \mu_g \int_M u^{2^*-1} \phi dV_g. \tag{2.25}$$

A idéia é escolher uma função teste especial. Fixe $\ell > 0$. Sejam $v \equiv u^+ = \max\{u, 0\}$ e $\beta > 1$ a ser escolhido convenientemente.

Defina as funções

$$G(v) = \begin{cases} v^{\beta} & \text{se} \quad v \leq \ell \\ \ell^{\alpha-1}(\alpha\ell^{\alpha-1}v - (\alpha-1)\ell^{\alpha}) & \text{se} \quad v > \ell \end{cases}$$

$$F(v) = \begin{cases} v^{\alpha} & \text{se} \quad v \leq \ell \\ \alpha\ell^{\alpha-1}v - (\alpha-1)\ell^{\alpha} & \text{se} \quad v > \ell, \end{cases}$$

onde $2\alpha = \beta$.

Afirmação. F, G são funções Lipschitzianas e $F(v), G(v)$ estão em $H^1(M)$.

Verificação. A primeira parte são cálculos longos e daí remetemos à [1, 15]. Quanto a segunda parte segue-se do Teorema de Stampacchia (veja [6]).

Note que

$$G'(v) = \begin{cases} \beta v^{\beta-1} & \text{se} \quad v \leq \ell \\ \ell^{2(\alpha-1)} & \text{se} \quad v > \ell \end{cases}$$

$$F'(v) = \begin{cases} \alpha v^{\alpha-1} & \text{se} \quad v \leq \ell \\ \alpha\ell^{\alpha-1} & \text{se} \quad v > \ell, \end{cases}$$

e assim como $\alpha < \beta$, temos

$$(F'(v))^2 \leq \alpha G'(v), \tag{2.26}$$

e usando as definições de F e G obtemos

$$(F(v))^2 \geq vG(v) \quad \text{e} \quad \alpha G = F'(v) \cdot F'(v). \tag{2.27}$$

Defina a seguinte função teste $\phi = \eta^2 G(v)$, onde $\eta \in C_c^1(M)$ função suporte compacto numa vizinhança coordenada de M. Podemos assumir que $\eta \in C_c^1(S_R)$, onde S_R denota uma esfera centrada na origem de raio R em $I\!R^n$. Aplicando em (2.25) e substituindo as integrais em M pelas integrais na esfera S_R, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{S_R} \sum_{ij} (g^{ij} u_j (2\eta_i \eta G(v) + \eta^2 G'(v) v_i) \\ &\qquad + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u \eta^2 G(v)) \sqrt{|g|} dx \\ &= \mu_g \int_{S_R} |u|^{2^*-1} \eta^2 G(v) \sqrt{|g|} dx, \end{aligned}$$

onde os índices das funções η e u denotam derivadas parciais. Usando novamente o Teorema de Stampacchia, podemos substituir u_i por v_i no conjunto onde $u \neq 0$. Aplicando ao segundo termo da igualdade acima a elipticidade da matriz da métrica, ou seja,

$$\frac{1}{\mu} \sum_i x_i^2 \leq \sum_{ij} g^{ij} x_i x_j \leq \mu \sum_i x_i^2, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n,$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{S_R}(\sum_i u_i^2)\eta^2 G'(v)\sqrt{|g|}dx \\
&\leq \mu_g \int_{S_R} |u|^{2^*-1}\eta^2 G(v)\sqrt{|g|}dx + \\
&\quad + \int_{S_R}\sum_{ij}(-g^{ij}u_j\eta_i\eta G(v)\sqrt{|g|}dx + \\
&\quad + \frac{n-2}{4(n-1)}\int_{S_R}(-S_g)u\eta^2 G(v))\sqrt{|g|}dx,
\end{aligned}
$$

donde usando que $u \leq v$, vem

$$
\begin{aligned}
&\int_{S_R}(\sum_i u_i^2)\eta^2 G'(v)\sqrt{|g|}dx \\
&\leq C\int_{S_R}(\sum_{ij} u_j\eta_i\eta G(v) + (v\eta^2 + v^{2^*-2}v\eta^2)G(v))\sqrt{|g|}dx,
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

onde C é uma constante dependendo de μ, η, g_{ij}, μ_g e S_g.

Usando (2.27) notamos que a primeira integral do segundo membro da desigualdade (2.28) torna-se

$$
\begin{aligned}
&C\int_{S_R}\sum_{ij} u_j\eta|\eta_i|G(v)\sqrt{|g|}dx = \\
&= \frac{C}{\alpha}\int_{S_R}\sum_{ij} u_j\eta|\eta_i|F(v)F'(v)\sqrt{|g|}dx \\
&= \frac{C}{\alpha}\int_{S_R}\sum_{ij} \eta F_j(v)F(v)|\eta_i|\sqrt{|g|}dx.
\end{aligned}
$$

Aplicando a desigualdade de Young, a saber,

$$ab \leq \frac{1}{2}(\epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon}b^2),\ \forall \epsilon > 0,$$

com $a = \eta F_j$ e $b = |\eta_i|F$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&C\int_{S_R}\sum_{ij} u_j\eta|\eta_i|G(v)\sqrt{|g|}dx \leq \\
&\leq \frac{C}{\alpha}\int_{S_R}(\sum_{ij}(\epsilon\eta^2 F_j^2(v) + \frac{1}{\epsilon}|\eta_i|^2 F^2(v))\sqrt{|g|}dx.
\end{aligned}
$$

Usando (2.26) e (2.27) em (2.28) resulta que

$$\begin{aligned}
&\int_{S_R} \eta^2 (\sum_j F(v)_j)^2 \sqrt{|g|} dx \leq \\
\leq \quad & \int_{S_R} C(\epsilon \eta^2 (\sum_j F(v)_j)^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_i |(\eta_i|^2 F^2(v)) \sqrt{|g|} dx + \\
+ \quad & C\alpha \int_{S_R} (\eta^2 (F(v))^2 + \eta^2 v^{2^*-2} F(v)^2) \sqrt{|g|} dx
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
(1 - C_\epsilon) & \int_{S_R} \eta^2 (\sum_j F(v)_j)^2 \sqrt{|g|} dx \leq \\
\leq \quad & \frac{C}{\epsilon} \int_{S_R} \sum_i |\eta_i|^2 F^2(v) \sqrt{|g|} dx + \\
+ \quad & C\alpha \int_{S_R} (\eta^2 (F(v))^2 + \eta^2 v^{2^*-2} F(v)^2) \sqrt{|g|} dx.
\end{aligned}$$

Tomando ϵ pequeno, a desigualdade fica

$$\begin{aligned}
&\int_{S_R} \eta^2 (\sum_j F(v)_j)^2 \sqrt{|g|} dx \leq \\
\leq \quad & \int_{S_R} (C' \sum_i |\eta_i|^2 + \eta^2) F^2(v) + C'' \eta^2 v^{2^*-2} F(v)^2)) \sqrt{|g|} dx.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Da desigualdade de Sobolev, vem

$$\begin{aligned}
|\eta F|_{2^*}^2 & \leq C |\nabla(\eta F)|_2^2 \\
& = C(\int_{S_R} |\eta \nabla F + F \nabla \eta|^2 \sqrt{|g|} dx \\
& \leq 2C \int_{S_R} (|\eta \nabla F|^2 + F^2 |\nabla \eta|^2) \sqrt{|g|} dx.
\end{aligned}$$

Usando (2.29) resulta

$$\begin{aligned}
|\eta F|_{2^*}^2 \leq \quad & C' \int_{S_R} (|\nabla \eta|^2 + \eta^2)) F^2(v) \sqrt{|g|} dx + \\
& + C'' \int_{S_R} \eta^2 v^{2^*-2} F(v)^2 \sqrt{|g|} dx.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Da desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{S_R} \eta^2 v^{2^*-2} F(v)^2 \sqrt{|g|} dx \leq (\int_{S_R} v^{2^*} \sqrt{|g|} dx)^{(n-2)/n} |\eta F|_{L^{2^*}(S_R)}^2. \tag{2.31}$$

Escolhendo R tal que

$$\int_{S_R} v^{2^*}\sqrt{|g|}dx \leq (4C\alpha)^{-n/(n-2)},$$

substituindo-se em (2.31) temos

$$\int_{S_R} \eta^2 v^{2^*-2} F(v)^2\sqrt{|g|}dx \leq \frac{1}{4C\alpha}|\eta F|^2_{L^{2^*}(S_R)}. \tag{2.32}$$

Note que

$$\int_{S_R} (|\nabla\eta|^2+\eta^2)F^2(v)\sqrt{|g|}dx \leq |(|\nabla\eta|+\eta)F|^2_{L^2(S_R)}.$$

Substituindo-se em (2.30) a desigualdade acima e usando (2.32) vem

$$\begin{aligned} |\eta F|^2_{L^{2^*}(S_R)} &\leq C|(|\nabla\eta|+\eta)F|^2_{L^2(S_R)} + \frac{1}{4}|\eta F|^2_{L^{2^*}(S_R)} \\ &\leq (C'|(|\nabla\eta|+\eta)F|_{L^2(S_R)} + \frac{1}{2}|\eta F|_{L^{2^*}(S_R)})^2. \end{aligned}$$

Assim

$$|\eta F|^2_{L^{2^*}(S_R)} \leq C'|(|\nabla\eta|+\eta)F|_{L^2(S_R)}.$$

Fixe β tal que $1 < \beta < 2^* - 1$, e fazendo $\ell \to \infty$ na expressão acima, mais exatamente, nas expressões de F e G, obtemos

$$|\eta v^\alpha|^2_{L^{2^*}(S_R)} \leq C'|(|\nabla\eta|+\eta)F|_{L^2(S_R)}.$$

Assuma que $\eta = 1$ na esfera $S_{R/2}$, esfera concêntrica a S_R, e $|\eta_i| \leq 2/R$ em S_R. Então

$$\begin{aligned} |\eta v^\alpha|^2_{L^{2^*}(S_{R/2})} &\leq |\eta v^\alpha|^2_{L^{2^*}(S_R)} \\ &\leq C''(\int_{S_R}(|\nabla\eta|+\eta)^2 v^{2\alpha}\sqrt{|g|}dx)^{1/2} \\ &\leq C''(\int_{S_R}(|\frac{2\sqrt{\eta}}{R}+\eta|^2 v^{2\alpha}\sqrt{|g|}dx)^{1/2} \\ &= C''(\frac{2\sqrt{\eta}}{R}+1)|v^\alpha|_{L^2(S_R)}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Trocando u por $-u$ obtemos uma desigualdade (2.33) para funções u.
Como $2\alpha < 2^*$, da imersão de Sobolev e (2.33) temos

$$|u|^\alpha_{L^{\alpha 2^*}(S_{R/2})} \leq C_R.$$

Fazendo $\alpha 2^* = r > 2^*$, obtemos

$$|u|_{L^r(S_{R/2})} \leq C_R. \tag{2.34}$$

Portanto, tome agora uma cobertura finita de M por vizinhanças coordenadas (U_i, h_i) tais que $U_i \subset h_i(S_{R_i})$, $i = 1, \dots s$, e uma partição da unidade $\{\alpha_i\}$ subordinada a esta cobertura. Temos que em cada esfera S_{R_i} é válido uma estimativa do tipo (2.34) para as funções $\alpha_i u$, concluindo, portanto, que u é limitada em $L^r(M)$, ou seja,

$$|u|_r = \sum_{i=1}^{s} |\alpha_i u|_r = \sum_{i=1}^{s} |\alpha_i u \circ h_i^{-1}|_{L^r(S_{R_i/2})} \leq C.$$

Logo u é limitada em $L^r(M)$, para algum $r > 2^*$.

Etapa 4. A solução u satisfaz $u = 0$ ou $u > 0$ em M.

Verificação. Como $u \geq 0$ em M, aplicando o Princípio de Máximo, segue-se que $u > 0$.

Etapa 5. Se $u \neq 0$, então u tem norma 1 em $L^{2^*}(M)$ e assume o ínfimo μ_g, ou seja, $I(u) = \mu_g$ e $\int_M u^{2^*} dV_g = 1$.

Verificação. Primeiramente note que (u_q) é limitada em $L^{2^*}(M)$, e daí a menos de uma sub-seqüência, u_q converge para u q.s. e fracamente em $L^{2^*}(M)$.
Visto que

$$\mu_g(\int_M u^{2^*} dV_g)^{(n-2)/2} \leq \lambda_q,$$

e como λ_q converge para μ_g, segue-se que

$$\int_M u^{2^*} dV_g \leq 1.$$

Por outro lado, multiplicando (E) por u, e integrando sobre M, vem

$$I(u) = \mu_g \int_M u^{2^*} dV_g.$$

Fazendo

$$v = (\int_M u^{2^*} dV_g)^{-(n-2)/n} u,$$

então da definição de μ_g, obtemos

$$\begin{aligned} \mu_g &\leq I(v) \\ &= (\int_M u^{2^*} dV_g)^{-(n-2)/n} I(u) \\ &= \mu_g(\int_M u^{2^*} dV_g)^{2/n}. \end{aligned}$$

Donde

$$\int_M u^{2^*} dV_g \geq 1.$$

Portanto $I(u) = \mu_g$.

Observe que até o momento não usamos a condição $(*)$. Usaremos essa condição para provar que a nossa solução é não nula.

Da desigualdade de Aubin[5], temos que dado $\epsilon > 0$ existe uma constante positiva B_ϵ tal que para todo $u \in H^1(M)$ tem-se,

$$(\int_M |u|^{2^*} dV_g)^{(n-2)/n} \leq (K(n,2)^2 + \epsilon)(\int_M |\nabla u|^2 dV_g + B_\epsilon \int_M u^2 dV_g).$$

Para simplificar, trabalharemos com $\epsilon = 0$. Como u_q é solução de (PYS), usando a desigualdade de Hölder e desigualdade de Sobolev, vem

$$1 \leq V_g^{2(1/q-(n-2)/2n)} K(n,2)^2 (\lambda_q + A \int_M u_q^2 dV_g),$$

onde

$$A = B_0 + \frac{n-2}{4(n-1)} \max_{x \in M} |S_g(x)|.$$

Passanto o limite na desigualdade acima, e lembrando que u_q converge fortemente para u em $L^2(M)$, obtemos

$$1 \leq K(n,2)^2 \mu_g + K(n,2)^2 A \int_M u^2 dV_g.$$

Mas a condição $(*)$ implica que $1 - K(n,2)^2 \mu_g > 0$. Portanto, inserindo essa informação na desigualdade acima, concluímos que a norma $L^2(M)$ de u é positiva, em particular, $u \neq 0$.

2.6 A condição $(*)$

A prova de que a condição $(*)$ é satisfeita deve-se a Aubin [5]. Prova é feita usando a seguinte função. Seja x_o um ponto de M e seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Para $\epsilon > 0$, seja u_ϵ uma função definida por

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} (\epsilon + r^2)^{1-\frac{n}{2}} - (\epsilon + \delta^2)^{1-\frac{n}{2}} & \text{se} \quad r \leq \delta \\ 0 & \text{se} \quad r \geq \delta, \end{cases}$$

onde r denota a distância de x a x_o. As funções u_ϵ são os extremos, ou seja, a função que assume a melhor constante de Sobolev, a saber, $K(n,2)$. Agora remetemos a [5].

3 Caso bidimensional-Kazdan & Warner

Essa seção é devida a trabalho de Kazdan e Warner [16](veja também [15]). Em uma variedade de duas dimensões, existe basicamente uma noção de curvatura, e o nosso problema torna aquele de descrever o conjunto de função curvatura gaussiana.

Sejam (M, g) uma variedade riemanniana bidimensional, $K \in C^{\infty}(M)$ a curvatura gaussiana associada à métrica g e $\tilde{K} \in C^{\infty}(M)$ uma função dada. É possível encontrar uma nova métrica $\tilde{g}$ em M, conforme à g (ou seja, $\tilde{g} = \mathrm{e}^{2u} g$, para alguma função $u \in C^{\infty}(M)$), tal que $\tilde{K}$ seja a curvatura gaussiana de M, associada à esta métrica?

A fim de encontrar a equação diferencial que determina u em termos dos dados $K, \tilde{K}$ e g, usaremos as coordenadas isotérmicas (w, v) em M. Então a equação de Gauss se reduz a (vide ([8] ou [20])):

$$K = \frac{-1}{2\sigma}\{(\log\sigma)_{ww} + (\log\sigma)_{vv}\}, \tag{3.35}$$

e o Laplaciano torna-se

$$\Delta\phi \equiv \Delta_g\phi = \frac{1}{\sigma}(\frac{\partial^2\phi}{\partial w^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}) \tag{3.36}$$

Por outro lado, podemos escrever os elementos de comprimento de arco, relativos as duas métricas, por

$$ds^2 = \sigma(dw^2 + dv^2) \ \text{ e } \ d\tilde{s}^2 = \tilde{\sigma}(dw^2 + dv^2).$$

Como as métricas são conforme, obtemos $\tilde{\sigma} = \sigma \mathrm{e}^{2u}$. Reescrevendo a equação de Gauss para $\tilde{g}$ e usando a iguadade acima vem

$$\tilde{K}\mathrm{e}^{2u} = -\frac{1}{\sigma}(\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}) + K. \tag{3.37}$$

Portanto, de (3.36) e (3.37) temos que u satisfaz a equação diferencial

$$\Delta_g u + \tilde{K}\mathrm{e}^{2u} - K = 0. \tag{3.38}$$

Seja v uma solução de

$$\Delta_g v = K - \overline{K},$$

onde $\overline{K} = \int_M K dA_g/(\text{area}M)$ é a média de K, e seja $w = 2(u - v)$. Então w satisfaz

$$\Delta_g w = 2\overline{K} - (2K\mathrm{e}^{2v})\mathrm{e}^{w}.$$

Assim, estudaremos a equação diferencial oriunda de um problema de geometria, a saber,

$$\Delta_g u = c - h\mathrm{e}^{u}, \tag{3.39}$$

onde c é uma constante e h é uma função dada.

Observe que se u for uma solução regular de (3.39), integrando sobre M, vem

$$\int_M h e^u dV_g = c\mathrm{Vol}(M),$$

então h e c têm o mesmo sinal. Estudaremos apenas um caso, usando o método de super e sub-solução.

3.1 Desigualdade Moser-Trudinger

Começaremos com a desigualdade Moser-Trudinger, a saber:
Existem constantes $\beta, \gamma > 0$ tais que para todo $u \in H^1(M)$ com média zero, ou seja, $\overline{u} = 0$, e $|\nabla u|_2$ limitada, tem-se

$$\int_M \mathsf{e}^{\beta u^2} dA \leq \gamma. \tag{3.40}$$

Daí temos a seguinte conseqüência, que decorre usando a desigualdade de Young.
Existem constantes $\beta, \gamma > 0$ tais que para todo $u \in H^1(M)$ e $\forall \alpha > 0$, tem-se

$$\int_M \mathsf{e}^{\alpha|u|} dA \leq \gamma \mathsf{exp}(\alpha|\overline{u}| + \frac{(\alpha|\nabla u|_2)^2}{4\beta}). \tag{3.41}$$

Verificação. Faça $a = |\nabla u|_2$ e defina v por $u = \overline{u} + av$. Então $|\nabla v|_2 = 1$, $\overline{v} = 0$ e então

$$\alpha a|v| \leq \beta v^2 + (\alpha a)^2/(4\beta),$$

assim, aplicando (3.40) obtemos o resultado.

Logo, quando M é bidimensional, temos

$$\text{se } \ u \in H^1(M), \text{ então } \ e^u \in L^p(M), \ 1 \leq p < \infty. \tag{3.42}$$

Outra conseqüência é se M é bidimensional e $u_n, u \in H^1(M)$, temos

$$\text{se } \ u_n \rightharpoonup u \text{ weakly em } \ H^1(M), \text{então } \ e^{u_n} \to e^u \text{ em } \ L^2(M). \tag{3.43}$$

Verificação. Pelo Teorema do valor médio temos que $|e^t - 1| \leq |t|e^{|t|}$, e podemos assumir, a menos de uma subseqüência, que $u_n \to u$ em $L^4(M)$. Combinando esses fatos, junto com a desigualdade de Schwarz vem

$$\begin{aligned}
\int_M |e^{u_n} - e^u|^2 dV &\leq \int_M e^{2u}|e^{u_n - u} - 1|^2 dV \\
&\leq \int_M e^{2u} e^{2|u_n - u|}|u_n - u|^2 dV \\
&\leq (\int_M e^{8u} dV)^{1/4} (\int_M e^{8|u_n - u|} dV)^{1/4} |u_n - u|_4^2.
\end{aligned}$$

Agora (3.41) garante a limitação dos termos dentro dos parênteses e note que $|u_n - u|_4 \to 0$. Isso conclui a prova.

Aplicação. Suponha que $h \neq 0$, $h \in C^\infty(M)$. Assuma que h muda de sinal e que $\int_M h dV < 0$. Então, a equação

$$\Delta_g u = \Delta u = -h\mathrm{e}^u \tag{3.44}$$

possui uma solução $u \in C^\infty(M)$. Na verdade, como vimos, as condições acima sobre h são necessárias.

Usaremos minimização para a suficiência. Defina

$$B = \{v \in H^1(M) : \int_M h\mathrm{e}^v dV = 0,\ \overline{v} = 0\}.$$

Como h muda de sinal, segue-se que $B \neq \emptyset$.

Minimizaremos o funcional $J(v) = \int_M |\nabla v|^2 dV$, restrito ao conjunto B.

Observe que $J \geq 0$. Seja $a = \inf_{v \in B} J(v)$. Seja v_n uma seqüência minimizante, então $J(v_n) \to a$. Note que podemos assumir que $|v_n|_{H^1}$ é limitada. Donde existe $v \in H^1(M)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(M)$. Isso implica que $\overline{v} = 0$. De (3.43), segue-se que $\mathrm{e}^{v_n} \to \mathrm{e}^v$ em $L^2(M)$. Portanto $\int_M h\mathrm{e}^v dV = 0$. Assim $v \in B$. Além disso, como $|v|_{H^1} \leq \liminf |v_n|_{H^1}$, segue-se que v minimiza J em B. Do teorema do multiplicador de Lagrange, podemos concluir que v é solução de (3.44). Usando a teoria de regularidade temos que $u \in C^\infty(M)$.

3.2 Método iterativo: Sub-Super solução

Muitas vezes, deparamos com uma situação em que o funcional é ilimitado, por exemplo, no nosso problema (3.39), quando h é positiva num aberto. Desta forma, apelamos para uma ferramenta muito eficiente que o método de sub-super solução. Consideramos M uma variedade não necessariamente de dimensão 2 e $h \in L^p(M)$, $p > \dim M$. É claro que se $h \in C^\infty(M)$ a prova do resultado abaixo poderá ser feita nos moldes clássicos.

Definições. Dizemos que $u \in W^{2,p}(M)$ (respectivamente, $v \in W^{2,p}(M)$) é uma sub-solução (respectivamente, super-solução) de (3.39) quando

$$\Delta u - c + h\mathrm{e}^u \geq 0, \ (\text{respectivamente, } \Delta v - c + h\mathrm{e}^v \leq 0), \ \text{em } M, \tag{3.45}$$

onde a desigualdade é válida quase sempre.

Lema 3.1 *Sejam $c < 0$ e $p > dimM$ duas constantes. Se existirem sub-solução e super-solução, $U, V \in W^{2,p}(M)$ de (3.39) e se $U \leq V$, então existe uma solução $w \in W^{2,p}(M)$ de (3.39), satisfazendo $U \leq w \leq V$, e $w \in C^\infty$*

Prova. Defina $k_1(x) = \max\{1, -h(x)\}$, assim $k_1 \geq 1 > 0$, e $k_1 \geq -h$. Seja $k(x) = k_1(x)\mathrm{e}^{V(x)}$, e observe que $k(x) \geq$ constante > 0. Como $V \in W^{2,p}(M)$, da imersão de Sobolev temos que V é contínua. Assim $k \in L^p(M)$. Obteremos uma solução de (3.46) por um processo de iteração. Seja

$$L\phi \equiv \Delta\phi - k\phi \;\text{ e }\; f(x,u) = c - h\mathrm{e}^u.$$

Então, da teoria elíptica, seja $u_{j+1} \in W^{2,p}(M)$ a única solução de

$$Lu_{j+1} = f(x, u_j) - ku_j,$$

onde $u_0 = V$. Note que $u_j \in W^{2,p}(M)$, então u_j é contínua, donde $f(x,u_j) \in L^P(M)$, e $f(x,u_j) - ku_j \in L^p(M)$. Consequentemente $u_{j+1} \in W^{2,p}(M)$. Afirmamos que

$$U \leq \ldots \leq u_{j+1} \leq u_j \leq \ldots \leq V.$$

Com efeito, as desigualdades decorrem do Princípio do Máximo. Por exemplo, para provar que $u_{j+1} \leq u_j$, conferimos indutivamente que $L(u_{j+1} - u_j) \geq 0$, e então aplicamos o Princípio do Máximo. As outras desigualdades são provadas de uma maneira análoga.

Como U, V e u_j são contínuas, a desigualdade acima mostra que u_j é uniformemente limitada. Assim,

$$||Lu_{j+1}||_p = ||c - h\mathrm{e}^{u_j} - ku_j||_p \leq \text{constante}.$$

Portanto, da estimativa L^p, u_j e suas derivadas de primeira ordem são uniformemente limitadas. Aplicando o teorema de Arzela-Ascoli temos que, passando a uma sub-seqüência se necessário for, u_j converge uniforme para uma função contínua u. Em verdade, da monotonicidade acima, a seqüência toda converge.

Da Estimativa a L^p,

$$\begin{aligned} |u_{i+1} - u_{j+1}|_{W^{2,p}} &\leq C||L(u_{i+1} - u_{j+1}||_p \\ &\leq C(||h||_p|\mathrm{e}^{u_i} - \mathrm{e}^{u_j}|_\infty + ||k||_p|u_i - u_j|_\infty). \end{aligned}$$

Portanto, u_j converge (forte) em $W^{2,p}(M)$, assim $u \in W^{2,p}(M)$. Note agora que o operador $L : W^{2,p}(M) \to L^p(M)$ é contínua, e daí u é solução de (3.39) e satisfaz $U \leq u \leq V$.

Agora da imersão de Sobolev, como $u \in W^{2,p}(M)$ então $u \in C^1(M)$. Da teoria Schauder, podemos provar indutivamente que $u \in C^\infty(\Omega)$ para todo aberto Ω onde $h \in C^\infty(\Omega)$.

Lema 3.2 *(***Existência de sub-solução***)Sejam $c < 0$ e $p > dimM$ duas constantes. Se existir uma super-solução $V \in W^{2,p}(M)$ de (3.39), então existe uma sub-solução $U \in W^{2,p}(M)$ de (3.39), satisfazendo $U \leq V$.*

Prova. Se h é limitada inferiormente, então podemos tomar como sub-solução $U = -C_o$, onde C_o é uma constante suficientemente grande. No caso geral, se $h \in L^p(M)$, defina $k_1(x) = \max\{1, -h(x)\}$ e seja $\alpha > 0$ uma constante a ser escolhida de modo que $\alpha \overline{k_1} = -c$. Então, é fácil ver que $\overline{\alpha k_1 + c} = 0$ e $(\alpha k_1 + c) \in L^p(M)$. Logo existe uma solução w de $\Delta w = \alpha k_1 + c$. Da regularidade L^p, segue-se que $w \in W^{2,p}(M)$. Portanto w é contínua.

Afirmamos que $U = w - \lambda$, com λ suficientemente grande, é uma sub-solução procurada.

De fato, primeiramente note que $U \leq V$, para qualquer $V \in W^{2,p}(M)$, pois w e V são contínuas. Além disso, U é uma sub-solução pois

$$\begin{aligned} \Delta U - c + h\mathrm{e}^U &= \alpha k_1 + h\mathrm{e}^{w-\lambda} \\ &\geq k_1(\alpha - \mathrm{e}^{w-\lambda}) > 0, \end{aligned}$$

para λ suficientemente grande.

Aplicação. Daremos uma aplicação do método iteração monotônica (método de sub e super-solução).

Considere o problema

$$\Delta_g u \equiv \Delta u = c - h\mathrm{e}^u, \quad c < 0, \quad h \in C^\infty(M). \tag{3.46}$$

Teorema 3.1 *Se* $\overline{h} = \int_M h dA/(\text{área}(M)) < 0$, *então existe uma constante* $c_- = c_-(h) \in [-\infty, 0)$ *tal que o problema (3.46) possui uma solução para todo* $c \in (c_-, 0)$, *e não possui solução se* $c < c_-$.

Prova. Em vista dos Lemas 3.1 e 3.2, uma condição necessária para existência de uma solução $u \in C^\infty(M)$ de (3.46) é a existência de uma super-solução $V \in C^\infty(M)$, ou seja,

$$\Delta V \leq c - h\mathrm{e}^V.$$

Claramente, se V é uma super-solução para um dado $c < 0$, então V é também uma super-solução para todo $\tilde{c} < 0$ tal que $c \leq \tilde{c}$. Logo, existe uma constante $c_- \in [-\infty, 0]$ tal que o problema (3.46) tem solução para todo $c < 0$ tal que $c > c_-$, e não possui solução se $c < c_-$.
Provaremos agora que se $\overline{h} < 0$ então $c_- < 0$. De fato, seja $v \in C^\infty(M)$ uma solução de $\Delta v = \overline{h} - h$. Como $|\mathrm{e}^t - 1| \leq |t|\mathrm{e}^{|t|}$, e $\overline{h} < 0$, podemos tomar um $a > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$|\mathrm{e}^{av} - 1| \leq \frac{-h}{2|h|_\infty}.$$

Seja $\mathrm{e}^b = a$. Se $c = a\overline{h}/2$ e $V = av + b$, temos

$$\Delta V - c + h\mathrm{e}^V = ah(\mathrm{e}^{av} - 1) + \frac{a\overline{h}}{2}$$

$$\leq \quad a|h|_\infty|e^{av}-1|+\frac{a\overline{h}}{2}$$
$$\leq \quad \frac{a\overline{h}}{2}-\frac{a\overline{h}}{2}=0.$$

Assim, com $c=\frac{a\overline{h}}{2}<0$, temos uma super-solução V. Consequentemente, $\overline{h}<0$ implica que $c_-(h)\leq a\overline{h}/2<0$.

4 Observações finais

Alguns problemas interessantes são quando o funcional não é limitado ou que o funcional não é homogêneo. Isso ocorre, por exemplo, quando se estuda perturbações do problema de Yamabe. Nestes casos, lançamos mão da teoria de pontos críticos. Djadli [7] usa para provar seus resultados o teorema de pontos críticos devido à Ambrosetti e Rabinowitz [2], conhecido na literatura por Teorema do Passo da Montanha. Consideraremos esses problemas num segundo curso.

Bibliografia

[1] K.B. Alvarenga, Sobre o problema de Yamabe para variedades riemannianas compactas, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasilia, Brasilia, 1990

[2] Ambrosetti e P.H. Rabinowitz, Dual variational method in critical point theory and applications, J. Funct. Anal. 14(1973),349-381

[3] T. Aubin, A course in differential geometry, AMS vol 27, Providence, 2001

[4] T. Aubin, Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations. Springer, Berlin, 1982

[5] T. Aubin, Équations différentielles non linéarires et probléme de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures et Appl. 55(1976), 269-296.

[6] H. Brezis, Analyse fonctionnelle. Masson, Paris, 1983

[7] Z. Djadli, Nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent on compact Riemannian manifolds, Calculus of variations and PDE's. 8(1999), 293-326

[8] M. P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, 1976

[9] M. P. do Carmo, Geometria riemanniana, Projeto Euclides- IMPA, Rio de Janeiro, 1979

[10] J. Escobar, Differential geometry and partial differential equations, 19º Colóquio Brasileiro de Matemática-SBM, IMPA, Rio de Janeiro, 1993

[11] D. Gilbarg e N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer Verlag, New York, 1977

[12] E. Hebey, Scalar curvature type problems in riemannian geometry, Notes from lectures at the University of Rome, Rome, 1999

[13] E. Hebey, Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities, AMS vol 5, 2000

[14] J. Jost, Riemannian geometry and geometric analysis, Springer,Berlin, 1995

[15] J. L. Kazdan, Prescibing the curvature of a riemannian manifold, AMS vol 57, Providence, 1985

[16] J. L. Kazdan e F. W. Warner, Curvature functions for compact 2-manifolds, Ann. of Math. 99(1974), 14-47

[17] J.M. Lee e T.H. Parker, The Yamabe problem, Bull. A. M.S. 17(1987), 37-91

[18] R. Schoen, Conformal deformation of a riemannian metric to constant scalar curvature, J. Diff. Geom. 20(1984), 479-495.

[19] G. Talenti, Best constants in Sobolev inequality, Ann. di Mat. Pura ed Appl. 110(1976), 353-372

[20] K. Tenenblat, Transformações de superfícies e aplicações, 13º Colóquio Brasileiro de Matemática-SBM, IMPA, Rio de Janeiro, 1981

[21] N.S. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of riemannian structures on compact manifolds, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 22(1968), 267-274

[22] H. Yamabe, On deformation of riemannian structures on compact manifolds, Osaka Math. J. 12(1960),21-37