UFPB – PROCESSO SELETIVO SERIADO 2006
RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA DA 3ª SÉRIE

- **Elaboração:** João Batista A. **Parente** e **Jorge** C. Duarte Filho
- **Revisão: Hélio** P. Almeida
- **Resolução: Lenimar** N. Andrade

1) Uma simples questão de proporção (vulgarmente conhecida como *regra de três*). Como $1kg = 10 \times 100g$ custa R\$ $4,00$, temos que $100g$ custam R\$ $0,40$.

Marcos comprou $12 \times 50g = 600g$ que custaram seis vezes quarenta centavos, ou seja, custaram R\$ $2,40$ (letra **E**).

2) A proposição I é **falsa** porque por um ponto dado passam uma infinidade de retas, e não uma única reta, como foi afirmado. A proposição II é **verdadeira**, podendo ser considerado a definição de retas concorrentes. A proposição III é **verdadeira** pois sustituindo (a, b) na equação da reta dada, obtemos $a + b - 1 = 0$, ou seja, $a + b = 1$. Assim, a alternativa correta é a letra **E**.

3) Consideremos uma equação "auxiliar" obtida através da troca das variáveis x por y e y por x na equação dada: $4y - x^2 + 6x - 5 = 0$. Com essa troca de variáveis, alteramos a posição do gráfico: a parábola dada possui eixo de simetria horizontal (Figura 1); com a troca de variáveis passa a ter eixo de simetria vertical (Figura 2). Isolando o valor de y, obtemos,

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}.$$

A abscissa do vértice de uma parábola como essa é dada por $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3/2)}{(1/2)} = 3$ e a ordenada é dada por $y = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}-(-\frac{3}{2})^2}{1} = \frac{5}{4} - \frac{9}{4} = -1$. Assim, o vértice da parábola "auxiliar" é o ponto $(3, -1)$. Trocando as coordenadas, obtemos que $(-1, 3)$ é o vértice da parábola dada. A reta que passa por esse ponto e que tem coeficiente angular -1 é dada pela equação $y - 3 = (-1)(x - (-1))$, ou seja, $x + y - 2 = 0$, o que corresponde à alternativa **A**.

Observação: Existem outras possibilidades de solução. Optamos pela transformação do problema dado em um simples cálculo de vértice do gráfico de uma função quadrática por acreditar que as fórmulas envolvidas são bastante conhecidas.

4) Se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios não-nulos tais que $f(2) = g(2) = 0$ e $r(x)$ é o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, então existe um polinômio $q(x)$ (o quociente da divisão) tal que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$. Fazendo $x = 2$, obtemos $f(2) = g(2)q(2) + r(2)$, ou seja, $0 = 0 + r(2)$ e daí obtemos $r(2) = 0$. Assim, a primeira proposição é **verdadeira**.

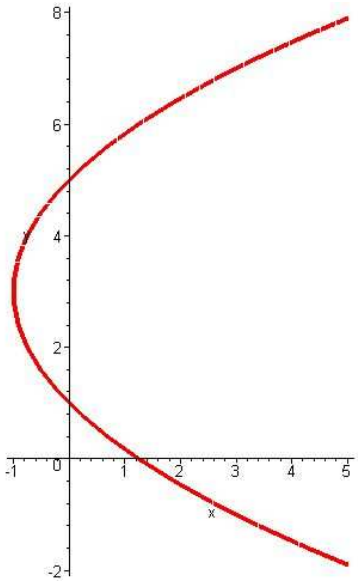


Figura 1: Parábola na posição original

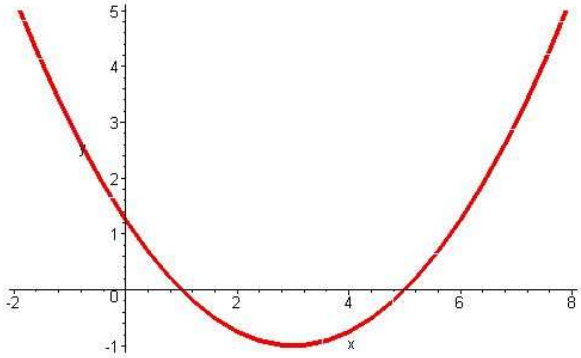


Figura 2: Parábola "auxiliar"

As possíveis raízes inteiras da equação $x^3 + 3x + 2 = 0$ só podem ser os divisores (positivos ou negativos) do termo independente de x, isto é, só podem ser os divisores de 2 que são 1, -1, 2 e -2. Testando um por um na equação, vemos que nenhum deles é raiz. Logo, o polinônimo dado não possui raízes inteiras e a segunda proposição é **falsa**.

O grau de um produto de polinômios é a soma dos graus dos fatores. Assim, ao multiplicarmos dois polinômios de grau 3, obtemos um resultado de grau 6, e não 9 como foi afirmado. Logo, a terceira proposição é **falsa** e alternativa correta da questão é a letra **A**.

5) Considere, em particular, $x = 1 + 2i \in G$ e $y = 3$. Então o quociente $\frac{x}{y} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i \notin G$ porque a parte real não é um número inteiro. Assim, a primeira proposição é **falsa**.

Se $x = m_1 + n_1 i \in G$ e $y = m_2 + n_2 i \in G$, então $xy = (m_1 + n_1 i)(m_2 + n_2 i) = (m_1 m_2 - n_1 n_2) + (m_1 n_2 + m_2 n_1)i$ é também um elemento de G porque tanto a parte real $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$ quanto a parte imaginária $(m_1 n_2 + m_2 n_1)$ são números inteiros. Logo, a segunda proposição é **verdadeira**.

Se $x = m_1 + n_1 i \in G$ e $y = m_2 + n_2 i \in G$, então $x + y = (m_1 + n_1 i) + (m_2 + n_2 i) = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)i$ é também um elemento de G porque tanto a parte real quanto a parte imaginária de $x + y$ são inteiros. Logo, a terceira proposição é **verdadeira** e, conseqüentemente, a alternativa correta é a letra **F** .

6) O centro de massa M do triângulo dado é o ponto obtido a partir do cálculo das médias aritméticas das coordenadas de A, B e C. Assim, M tem coordenadas $\left(\frac{0+12+0}{3}, \frac{0+0+9}{3}\right) = (4, 3)$.

A equação da reta r que passa por B e C é $\frac{x}{12} + \frac{y}{9} = 1$, ou seja, $9x + 12y - 108 = 0$.

Aplicando a fórmula de distância $d_{Mr} = \left|\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$, obtemos que a distância procurada é $\left|\frac{9\times4+12\times3-108}{\sqrt{9^2+12^2}}\right| = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}$ que corresponde à alternativa **B**.

7) Na figura dada, temos um total de 100 quadradinhos, entre os quais 20 são hachurados. Logo, a probabilidade de selecionarmos um hachurado é $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, o que corresponde à alternativa **D**.

8) A circunferência dada tem centro na origem e raio 2; logo, sua equação é $x^2 + y^2 = 4$. Na figura dada, estão destacados a circunferência e o seu exterior, que, juntos, podem ser descritos pela desigualdade $x^2 + y^2 \geq 4$.

A elipse da figura tem centro na origem e eixo maior horizontal. Logo, sua equação é da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Observando a figura, concluímos que $a = 4$ e $b = 3$ e, daí, a equação da elipse é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Como está hachurado o seu interior, temos que a desigualdade associada a esse conjunto de pontos (a elipse e o seu interior) é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ que é equivalente a $9x^2 + 16y^2 \leq 144$.

A área hachurada na figura corresponde ao interior da elipse e ao exterior da circunferência, incluindo-se as próprias curvas envolvidas. Logo, as duas desigualdades mencionadas anteriormente devem ser consideradas simultaneamente e, conseqüentemente, a alternativa correta é a letra **C**.

Observação: A alternativa D corresponde aos pontos que estão na circunferência ou no seu exterior ou na elipse ou no seu interior, o que equivale a **todos os pontos do plano** – que não é a área hachurada na figura. Cuidado para não confundir "ou" com "e".

9) Susbtituindo-se as coordenadas x, y do ponto $(-1, 1)$ na expressão $x^2 + y^2$, obtemos $(-1)^2 + 1^2 = 2$ que é um resultado menor do que 4. Logo, esse ponto é interior à circunferência e, assim, a proposição 1 é **verdadeira**.

Substituindo-se $(x, y) = (-2, 2)$ em $x^2 + y^2$, obtemos um resultado igual a 8, maior do que 4. Por isso, o ponto $(-2, 2)$ é exterior à região delimitada pela circunferência dada e a proposição 2 também é **verdadeira**.

Substituindo-se $(x, y) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ em $x^2 + y^2$ obtemos um resultado igual a 4. Logo, o ponto pertence à circunferência e a proposição associada ao número 4 é **verdadeira**.

Substituindo-se $y = x$ na equação da circunferência, obtemos $x^2 + x^2 = 4$, que é equivalente a $x^2 = 2$. Obtemos, assim, uma equação com duas raízes reais distintas ($-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$) e, portanto, a reta intercepta a circunferência em dois pontos. Desse modo, a proposição associada ao número 8 também é **verdadeira**.

Substituindo-se $y = -x + 2$ na equação da circunferência, obtemos $x^2 + (-x + 2)^2 = 4$ que é equivalente a $2x^2 - 4x + 4 = 4$, ou seja, $x^2 - 2x = 0$. Essa equação tem duas raízes reais distintas (0 e 2) o que significa que a reta intercepta a circunferência em dois pontos distintos. Por isso, a proposição associada ao número 16 é **falsa**.

A soma dos valores associados às proposições verdadeiras é $1 + 2 + 4 + 8 =$ **15**.

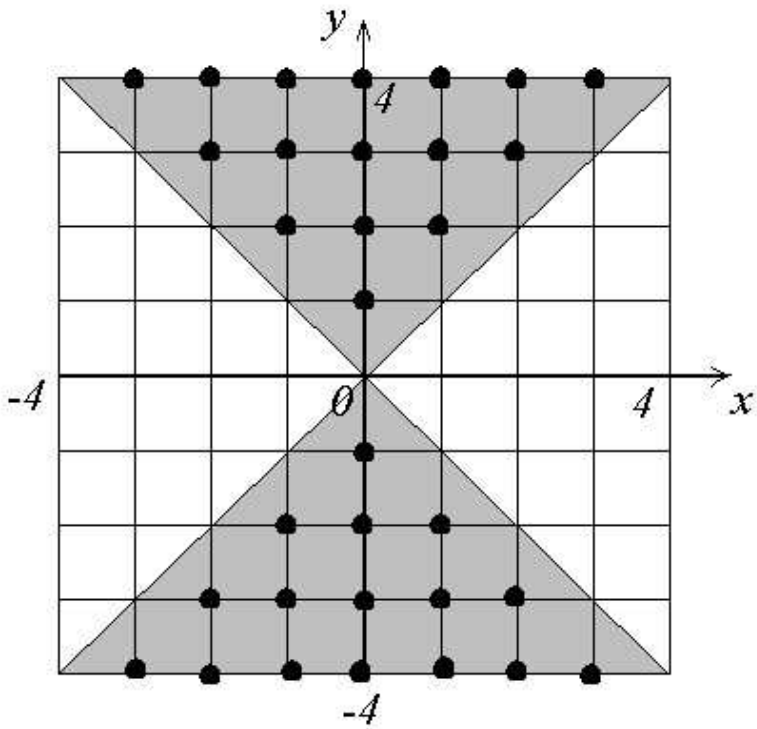
10) Do enunciado, deduzimos imediatamente que 80% dos alunos gostam de Matemática. Isso equivale a $\frac{80 \times 120}{100} =$ **96** alunos.

11) Diversos tipos de solução podem ser formuladas para esta questão. Optamos por uma solução geométrica que parece ser a solução mais rápida (mas não necessariamente

a mais fácil).

A desigualdade $y^2 - x^2 > 0$ é equivalente a $(y + x)(y - x) > 0$, ou seja, ($y + x > 0$ e $y - x > 0$) ou ($y + x < 0$ e $y - x < 0$). Geometricamente, corresponde à área hachurada na Figura 3.

Figura 3:



Uma vez identificada essa região, basta contar quantos pontos de coordenadas inteiras de -4 a 4 ocorrem nessa região. Observando a Figura 3, temos que a resposta procurada é $(1 + 3 + 5 + 7) + (1 + 3 + 5 + 7) =$ **32** .

12) O lado do quadrado da figura mede $\sqrt{144} = 12\ cm$. Logo, o triângulo retângulo ABE tem catetos medindo 12 cm e 6 cm e, daí, sua área é $\frac{12 \times 6}{2} = 36\ cm^2$. O triângulo ADF também tem área 36 cm^2. Concluímos, então, que a área do papel utilizado na pipa é $144 - 36 - 36 = 72\ cm^2$.