UFPB – PROCESSO SELETIVO SERIADO 2003
RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA DA 3ª SÉRIE

(por Lenimar N. Andrade)

1) Esta questão pode ser resolvida de várias maneiras, inclusive pode considerada uma questão de Geometria Analítica. Para isso, escolhamos uma origem; suponhamos $A = (0, 0)$. A partir da escolha da origem, temos as seguintes coordenadas para os outros pontos: $B = (2, 0)$, $C = (2, 3)$, $D = (4, 3)$, $E = (6, 5)$ e o centro da circunferência $O = (6, 3)$. Assim, basta usar a fórmula da distância entre dois pontos para obtermos cada resposta.

a) $d_{CO} = \sqrt{(6-2)^2 + (3-3)^2} = 4$;
b) $d_{AD} = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$;
c) $d_{AE} = \sqrt{(6-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{61}$.

2) As inclinações das retas AB e BP são $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1/2$ e $m_{BP} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{n-1}{m}$. Como AB e BP são perpendiculares, temos $m_{AB} \cdot m_{BP} = -1$, isto é, $-\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{m}\right) = -1$ o que implica $n - 1 = 2m$.

Sendo AB e BP perpendiculares, a área do triângulo ABP é dada por $\frac{d_{AB} \cdot d_{BP}}{2} = 10$. Como $d_{AB} = \sqrt{5}$ e $d_{BP} = \sqrt{m^2 + (n-1)^2}$, temos que

$$\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{m^2 + (n-1)^2}}{2} = 10$$

que equivale a $m^2 + (n-1)^2 = 80$. Substituindo nessa última equação $n - 1$ por $2m$, obtemos $5m^2 = 80$ que implica $m = \pm 4$. Como m deve ser negativo, temos $m = -4$. Substituindo em $n - 1 = 2m$, obtemos $n = -7$. Portanto o ponto procurado é $P = (-4, -7)$.

3) O vértice da parábola $y = x^2$ é o ponto $F = (0, 0)$. A circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{6}$ tem equação $x^2 + y^2 = 6$.

Para determinar a interseção da parábola com essa circunferência, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} y &= x^2 \\ x^2 + y^2 &= 6 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação do sistema na segunda, obtemos $y^2 + y - 6 = 0$ cuja solução é $y = -3$ ou $y = 2$. Como $y = x^2 \geq 0$, temos $y = 2$ e daí $x = \pm\sqrt{2}$. Logo, dois dos vértices da elipse são os pontos $V_1 = (-\sqrt{2}, 2)$ e $V_2 = (\sqrt{2}, 2)$ – veja a figura.

O centro O da elipse é o ponto médio do segmento cujas extremidades são os vértices V_1 e V_2. Portanto, $O = (0, 2)$.

O comprimento b do semi-eixo menor da elipse é a distância do centro a um dos vértices. Logo, $b = \sqrt{2}$.

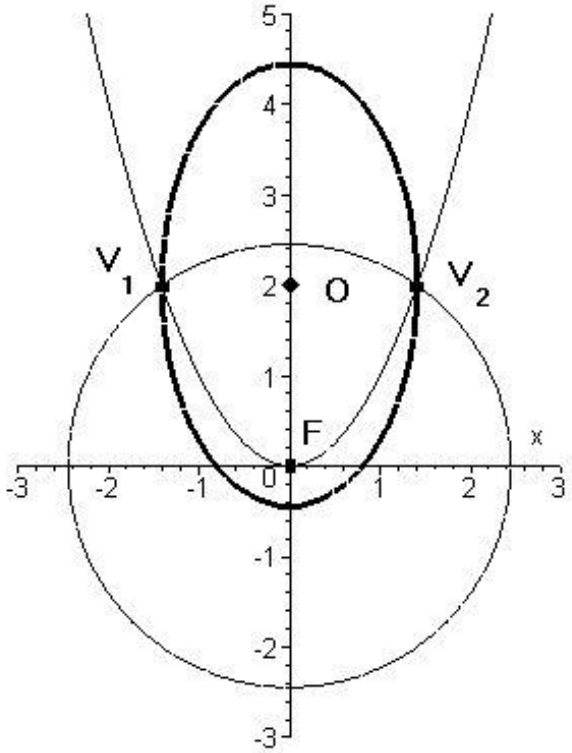
A distância c entre o centro e o foco F é 2. Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos $a^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2 \Rightarrow a = \sqrt{6}$.

Como o eixo maior da elipse é vertical, temos que sua equação é da forma $\frac{(x-x_O)^2}{b^2} + \frac{(y-y_O)^2}{a^2} = 1$, ou seja,

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{6} = 1.$$

4) Sejam V e D os eventos *"ter vogal no código"* e *"ter dois dígitos iguais no código"*, respectivamente.

Como temos 5 vogais em um universo de 26 letras, temos que a probabilidade do evento V ocorrer é $P(V) = 5/26$.



De 00 a 99 temos 100 possibilidades, entre as quais somente 10 com dígitos iguais: $00, 11, 22, \cdots 99$. Logo, $P(D) = 10/100 = 1/10$.

Como $P(V \cap D) = P(V) \cdot P(D) = 1/52$, temos finalmente que $P(V \cup D) = P(V) + P(D) - P(V \cap D) = 5/26 + 1/10 - 1/52 = 71/260$.

5) Como $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$, temos que $\bar{z} \cdot z^2 \cdot \bar{z}^3 \cdot z^4 = (\bar{z} \cdot z) \cdot z \cdot (\bar{z} \cdot z)^3 z = z \cdot z = z^2$. Logo, devemos ter $z^2 = i \Rightarrow z = \sqrt{i}$.

A forma polar de i é $i = \cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)$. Sendo $k \in \mathbb{Z}$ temos $\sqrt{i} = \cos(\frac{\pi/2+2k\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi/2+2k\pi}{2}) = \cos(\pi/4 + k\pi) + i \operatorname{sen}(\pi/4 + k\pi) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6) A soma das raízes de $p(x)$ é $a + b = 2c$ e o produto das raízes é $ab = c^2 - 2c - 1$.

Como $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a+b)^2 - 4ab$, temos que

$$\frac{(a-b)^2 - 2}{(a+b)^2 + 2} = \frac{(2c)^2 - 4(c^2 - 2c - 1) - 2}{(2c)^2 + 2} = \frac{4c+1}{2c^2+1}$$

que deve ser um inteiro par, logo, devemos ter $\frac{4c+1}{2c^2+1} = 2k$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Se tivermos $k = 0$, então $4c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1/4$.

Se $k \neq 0$, então $4c+1 = 2k(2c^2+1) \Rightarrow 4kc^2 - 4c + (2k-1) = 0$, que é uma equação do segundo grau na variável c. Para essa equação admitir solução real, devemos ter $\Delta = 16 - 16k(2k-1) \geq 0$, ou seja, $2k^2 - k - 1 \leq 0$. A solução dessa última inequação é $-1/2 \leq k \leq 1$. Como k é inteiro não nulo, temos apenas a solução $k = 1$.

Mas, $k = 1$ implica $\frac{4c+1}{2c^2+1} = 2k = 2$ que equivale a $4c^2 - 4c + 1 = 0$. Portanto, $c = 1/2$.

Conclusão: os possíveis valores de c são $-1/4$ e $1/2$.