Código de Identificação do Candidato:

Álgebra Linear

PPGMat/UFPB – Prova do Processo Seletivo 2023.2

1. Seja a matriz quadrada de ordem 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

   a) (0,5) É correto afirmar que A é uma matriz invertível?

   b) (0,5) Justifique a resposta dada ao item anterior.

2. (1,5) Ao estudar modos de movimento de um corpo rígido, uma aluna precisa identificar uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa uma contração de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ seguida por uma rotação horária de 45 graus. Qual a aplicação T representa todo esse movimento?

3. (2,0) Determine todos os isomorfismos de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$.

4. Ao tentar resolver o problema de determinar dos autovetores associados um autovalor fixado de um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, um aluno se depara com o sistema linear nas incógnitas x e y associado a este autovalor fixado

$$\begin{cases} x - \sqrt{2}x + y = 0 \\ x - y - \sqrt{2}y = 0. \end{cases}$$

   a) (1,0) É correto afirmar que T é diagonalizável?

   b) (1,0) Justifique a resposta dada ao item anterior.

5. Ao tentar resolver o problema de determinar se um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é diagonalizável, uma aluna reconheceu a matriz que representa T com a relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ como sendo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

   Prontamente, a aluna concluiu que T não é um operador linear diagonalizável.

   a) (1,0) A conclusão da aluna é verdadeira?

   b) (1,0) Justifique a resposta dada ao item anterior.

6. (1,5) Para todos v e $w \neq 0$ em um espaço vetorial. Prove que existe uma única projeção ortogonal de v em w.

Código de Identificação do Candidato:

Análise Real

PPGMat/UFPB – Prova do Processo Seletivo 2023.2

1. (1,5) Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ e o conjunto $A = \{f(x);\ x \in \mathbb{R}\}$.

   Calcule $\sup A$ e $\inf A$. Justifique sua resposta.

2. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto ilimitado e $x \in X$.

   a) (1,0) Mostre que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $|x_n - x| > n$.

   b) (0,5) Existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X que não possui qualquer subsequência convergente.

3. (1,5) Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $x_n > 0$ e $y_n > 0$.

   Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Mostre que $\sum x_n$ converge se e somente se $\sum y_n$ converge.

4. Para $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, considere a equação

$$x^{2n+1} + ax^{2n} + b = 0 \tag{1}$$

   a) (0,75) Prove que a equação (1) admite ao menos uma raíz real.

   b) (0,50) Enuncie o Teorema de Rolle.

   c) (0,75) Use o Teorema de Rolle para provar que quando $a > 0$ a equação (1) tem apenas uma solução real.

   Dica item c): Uma polinônimo de grau ímpar deve ter um número ímpar de raízes reais.

5. (2,0) Seja $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e suponha que existe $M > 0$ tal que

$$|f'(x)| \leq M, \quad \forall x \in (a, b).$$

   Seja também $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência tal que $x_n \in (a, b)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, prove que $f(x_n)$ é uma sequência de Cauchy.

6. (1,5) Seja $f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [1, 2] \\ 0, & \text{se } x \notin [1, 2]. \end{cases}$

   Usando a definição de integral, prove que

$$\int_0^3 f(x)dx = 1.$$

Código de Identificação do Candidato:

Análise no $\mathbb{R}^N$

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2023.2

1. a) (1,0) Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação e $a \in A$. Suponha que para toda sequência $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to a$ tem-se uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) satisfazendo $f(x_{n_k}) \to f(a)$. Mostre que f é contínua no ponto a.

   b) (1,0) Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto e uma aplicação $f : K \to \mathbb{R}^m$. Suponha que o gráfico de f, dado por
   $$\mathrm{Graf}(f) := \{(x, f(x)) : x \in K\},$$
   é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Prove que $f : K \to \mathbb{R}^m$ é contínua.

2. (1,5) Seja $M(n)(\simeq \mathbb{R}^{n^2})$ o espaço das matrizes de ordem n. Definindo $f : M(n) \to M(n)$ por $f(X) = X^3$, mostre que f é diferenciável e calcule $f'(A).X$ para $A, X \in M(n)$.

3. (1,5) Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ contínua no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ com $[a, a+v] \subset U$. Se f é diferenciável em todos os pontos de $(a, a+v)$ então, para toda $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, mostre que
   $$|f(a+v) - f(a) - T.v| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'(a+tv) - T\|.|v|$$

4. (1,5) Considere a superfície S definida por $xy - z\ln y + e^{yz} - e = 0$. Mostre que é possível representá-la na forma $z = f(x,y)$ em uma vizinhança de $P_0 = (0,1,1)$. Qual a classe de diferenciabilidade da função f? Além disso, determine $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

5. a) (0,5) Sejam $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0 \text{ e } v > 0\}$ e $T : U \to \mathbb{R}^2$ definida por
   $$T(u,v) = (x,y) = (u^2 - v^2, 2uv).$$
   Mostre que T é injetiva;

   b) (0,5) Mostre que T é um difeomorfismo C^∞ de U sobre sua imagem $V = T(U)$.

   c) (1,0) Considere o retângulo $K = [1,2] \times [1,3]$ no plano uv. O difeomorfismo T leva K numa região R do plano xy. Determine a área da região R.

6. (1,5) Sejam $a > 0$ e $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Justifique a existência das seguintes integrais e mostre que
   $$\int_0^a \left(\int_0^y 2ye^{a-x} f(x)dx \right) dy = \int_0^a (a^2 - x^2)e^{a-x} f(x)dx.$$

Código de Identificação do Candidato:

Estruturas Algébricas

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2023.2

1. Seja $(G,*)$ um grupo com elemento neutro e. Se $a,b \in G$, então $[a,b] := a^{-1} * b^{-1} * a * b$ é o comutador de a e b.

   (a) (1,0) Seja $z = [a,b]$. Se $[z,a] = e$ e $[z,b] = e$, então mostre que $[a^n, b^m] = z^{nm}$ para todo n,m naturais.

   (b) (1,0) Se $G = \langle \theta, r \rangle \leq S_6$ sendo $\theta = (1\,2\,3\,4\,5\,6)$, $r = (2\,6)(3\,5)$ e $a,b \in \langle \theta, r \rangle$ são tais que $[a,b] \neq e$. Verifica-se que a ordem de $[a,b]$ é 3? Justifique sua resposta!

2. Se $(G,*)$ é um grupo, então $\mathrm{Aut}(G) := \{\varphi : G \longrightarrow G \mid \varphi \text{ é um isomorfismo de grupos }\}$. Assuma que G é abeliano e para cada $k \in \mathbb{Z}$ defina $\varphi_k : G \longrightarrow G$ por $g \longmapsto g^k$.

   (a) (1,0) Se $|G| < \infty$, então mostre que: $\varphi_k \in \mathrm{Aut}(G)$ se, e somente se, $\mathrm{mdc}(k, |G|) = 1$.

   (b) (0,5) Determine a ordem de $\mathrm{Aut}(G)$, se G for um grupo cíclico infinito.

   (c) (0,5) Determine a ordem de $\mathrm{Aut}(G)$, se $|G| = p$ sendo p primo.

3. (1,0) Seja G um grupo de ordem 57. Determine a quantidade de elementos de ordem 3 de G.

4. Sejam $(A,+,\cdot)$ um anel comutativo com unidade e S um subconjunto de A contendo a unidade (i.e. $1 \in S$). Dizemos que S é multiplicativamente saturado se para quaisquer $a,b \in A$ verifica-se que: $a \cdot b \in S \iff a \in S$ e $b \in S$.

   A seguir considere $A = \mathbb{C}[x]$. Se $f \in \mathbb{C}[x]$, então defina $\mathcal{Z}(f) = \{a \in \mathbb{C} \mid f(a) = 0\}$, e para cada $T \subseteq \mathbb{C}$, considere $S(T) := \{f \in \mathbb{C}[x] \mid \mathcal{Z}(f) \subseteq T\}$.

   (a) (1,0) Mostre que $S(T)$ é multiplicativamente saturado.

   (b) (1,0) Se $S \subseteq \mathbb{C}[x]$ for multiplicativamente saturado, podemos concluir que $S = S(T)$ para algum $T \subseteq \mathbb{C}$? Justifique sua resposta!

5. Considere o anel de polinômios $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Para cada ideal I de S defina

$$I^{sat} := \Big\{ f \in S \mid \exists\, m \text{ inteiro positivo de modo que } x_i^m f \in I, \text{ para } i = 0,1,2,3 \Big\}.$$

   (a) (0,5) Mostre que I^{sat} é um ideal de S.

   (b) (0,5) $I^{sat} \cap J^{sat} = (I \cap J)^{sat}$ se I, J são ideais de S? Justifique sua resposta!

   (c) (0,5) I^{sat} ideal primo de S, implica em I ideal primo de S? Justifique sua resposta!

6. Considere o anel $\mathcal{A} = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(a) \in \mathbb{Z}, \forall\, a \in \mathbb{Z}\}$ com as operações usuais de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}[x]$. Seja $I = \{f \in \mathcal{A} \mid f(0) \text{ é par }\}$.

   (a) (1,0) Mostre que I é um ideal primo do anel $\mathcal{A}$.

   (b) (0,5) I é um ideal finitamente gerado do anel $\mathcal{A}$? Justifique sua resposta!

Código de Identificação do Candidato:

Geometria Diferencial

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2023.2

1. (2,0) Suponha que todas as normais a uma curva parametrizada passem por um ponto fixo. Mostre que o traço da curva está contido em um círculo.

2. (2.0) Encontre a equação do plano tangente em (x_0, y_0, z_0) a uma superfície regular dada por $f(x, y, z) = 0$, onde 0 é um valor regular de uma função suave f.

3. (2,0) Calcule a curvatura Gaussiana do hiperbolóide $z = xy$ no ponto $(0, 0, 0)$.

4. Responda:

   (i) (1,0) Se existem duas geodésicas simples e fechadas γ_1 e γ_2 em uma superfície S compacta, conexa e com curvatura positiva, mostre que γ_1 e γ_2 se intersectam.

   (ii) (0,5) Seja T um triângulo geodésico em uma superfície S. Mostre que

$$\int_T K dA + \pi = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i,$$

   onde φ_i são os ângulos internos de T. A seguir, deduza que a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico na esfera é maior que π.

5. (1.0) Mostre que a esfera é uma superfície regular. A seguir calcule a curvatura Gaussiana da esfera de raio 1.

6. Assinale certo ou errado nas afirmações abaixo justificando sua resposta.

(i) (0,5) Se uma superfície pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas cuja interseção é conexa, então a superfície é orientável.

(ii) (0,5) O helicóide $\phi(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au)$ não é uma superfície mínima.

(iii) (0,5) Se S não é homeomorfa a uma esfera, então S possui pontos elípticos, hiperbólicos e parabólicos.