Código de Identificação do Candidato:

# Álgebra Linear

Prova do Processo Seletivo 2022.2

1. Denote por $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios reais de grau menor ou igual a $n$.

   a) (0,75) Sejam $\alpha = \{x, x+1\}$ e $\beta = \{x^3, x^2-1, x, x+1\}$. Mostre que $\alpha$ é uma base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ e que $\beta$ é uma base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

   b) (0,75) Seja $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definida por $T(p(x)) = x^2 p(x)$. Mostre que $T$ é uma transformação linear e determine a matriz $[T]_\alpha^\beta$.

2. Seja $V$ um espaço vetorial $n$-dimensional sobre o corpo $\mathbb{R}$ e seja $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base ordenada de $V$.

   (a) (0,5) Mostre que existe um único operador linear $T$ sobre $V$ tal que

   $$T(v_j) = v_{j+1}, \quad j = 1, ..., n-1, \quad T(v_n) = 0.$$

   Qual é a matriz de $T$ em relação à base ordenada $\mathcal{B}$?

   (b) (0,25) Demonstrar que $T^n = 0$ mas $T^{n-1} \neq 0$.

   (c) (0,75) Seja $S$ um operador linear arbitrário sobre $V$ tal que $S^n = 0$ mas $S^{n-1} \neq 0$. Demonstrar que existe uma base ordenada $\mathcal{B}'$ de $V$ tal que a matriz de $S$ em relação à base ordenada $\mathcal{B}'$ é a matriz da parte (a).

3. Seja $V$ um espaço vetorial com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Denote por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ a norma induzida pelo produto interno.

   a) (0,25) Enuncie a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

   b) (1,25) Mostre que $\|u_n - u\| \to 0$ se, e somente se, $\|u_n\| \to \|u\|$ e $\langle u_n, u \rangle \to \langle u, u \rangle$, quando $n \to +\infty$.

   c) (0,5) Mostre que $\|z\| = \sup\limits_{\|y\|=1} |\langle z, y \rangle|$.

4. (2,0) Enuncie o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt num espaço vetorial de dimensão finita. Como aplicação considere o espaço $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dos polinômios reais de grau menor ou igual a 3, com o produto interno dado por

   $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

   Seja $W = [4, t, 1+t^2]$ o subespaço gerado pelos polinômios $p_1(t) = 4$, $p_2(t) = t$ e $p_3(t) = 1+t^2$, para $0 \leq t \leq 1$. Ache uma base ortonormal para $W$.

5. (1,5) Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ não é diagonalizável. No entanto, se $A$ representa numa certa base um operador $T : V \to V$, onde $V$ é um espaço vetorial complexo, então $T$ é diagonalizável. Verifique este fato, ou equivalentemente, que existe uma matriz com elementos complexos $P_{3\times 3}$, invertível, tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

6. (1,5) Determine, se possível, base e os blocos de Jordan da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Código de Identificação do Candidato:

# Análise na Reta

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2022.2

1. (1,0) Sejam $A$ e $B$ conjuntos não vazios de números reais, tais que vale: $x \in A$ e $y \in B \Rightarrow x \leq y$.

   **a)** Mostre que $\sup A \leq \inf B$.

   **b)** Mostre que $\sup A = \inf B$ se, e só se, para todo $\varepsilon > 0$, podem-se obter $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.

2. (2,0) Seja $(a_n)$ uma sequência de números reais tal que $a_n \neq 0$ para todo $n$ e $\lim a_n \neq 0$.

   **a)** Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $|a_n| > \delta$ para todo $n$.

   **b)** Usando a), mostre que a sequência $(1/a_n)$ é convergente e $\lim(1/a_n) = 1/\lim a_n$.

3. (2,0) Mostre que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\sum_{j=n}^{m} a_j| < \varepsilon$ para todos $m \geq n \geq n_0$.

4. (1,0) Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas.

   **a)** Mostre que $Z = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ é um conjunto fechado.

   **b)** Conclua, usando a), que $C = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ é um conjunto fechado.

5. (2,0) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável. Se $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq |f(x)|$ $\forall x \in \mathbb{R}$, mostre que $f$ é a função identicamente nula.

6. (2,0) Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis.

   **a)** Mostre que se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

   **b)** Conclua, usando a), que $\int_a^b |f(x)|dx \geq 0$.

Código de Identificação do Candidato:

# Análise no $\mathbb{R}^N$

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2022.2

1. (1,5) Sejam $(x_k)$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $x_k \to a$ se, e somente se, $\langle x_k, y\rangle \to \langle a, y\rangle$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, em que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$.

2. (1,0) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos limitados, disjuntos e não-vazios. Seja

$$d(A,B) := \inf_{x\in A,\, y\in B} |x-y|, \quad \text{em que } |\cdot| \text{ denota a norma euclidiana em } \mathbb{R}^n.$$

Mostre que se $d(A,B) = 0$ então $\partial A \cap \partial B \neq \emptyset$. ($\partial X$ denota a fronteira de $X$)

3. (1,0) Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua satifazendo $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = +\infty$. Mostre que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $g(x_0) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} g(x)$.

4. (1.0) Sejam $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funções diferenciáveis. Mostre que $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \langle f(x), g(x)\rangle, \quad (\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ denota o produto interno canônico em } \mathbb{R}^p)$$

é diferenciável e para $x, h \in \mathbb{R}^m$ determine $\varphi'(x).h$, a derivada de $\varphi$ no ponto $x$ aplicada em $h$.

5. (1,5) Sejam $b \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, $c \in \mathbb{R}$ e $H$ o hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, b\rangle = c\}, \quad (\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ denota o produto interno canônico em } \mathbb{R}^{n+1})$$

Mostre que o ponto **de $H$ mais próximo** do ponto $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ é $y = a + \dfrac{c - \langle a, b\rangle}{|b|^2} b$

6. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ e

$$u = f(x), \quad v = -y + xf(x).$$

a) (1,0) Mostre que se $f'(x_0) \neq 0$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, então a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $\varphi(x,y) = (u,v)$, é invertível numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0)$, em que $y_0 \in \mathbb{R}$;

b) (1,0) Dê a forma da aplicação inversa em torno de $(u_0, v_0)$ em que $u_0 = f(x_0)$ e $v_0 = -y_0 + x_0 f(x_0)$. Qual é a classe de diferenciabilidade da aplicação inversa?

7. a) (0,5) Enuncie com precisão o Teorema da Mudança de Variáveis para integrais múltiplas.

   b) (1,5) Calcule a integral

$$\int_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy,$$

onde $R \subset \mathbb{R}^2$ é a região delimitada pelos eixos coordenados e pela reta $y = 1 - x$.

Código de Identificação do Candidato:

# Estruturas Algébricas

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2022.2

1. Sejam $(G, *)$ um grupo e $H$ um subgrupo de $G$.
   (a) (1,0) Se $(G : H) = 2$ então mostre que $H$ é um subgrupo normal de $G$.
   (b) (0,5) Se $(G : H) = 3$ então $H$ é um subgrupo normal de $G$? Justifique sua resposta!
   (c) (0,5) Seja $D_6 = \langle \theta, r \rangle \leq S_6$ sendo $\theta = (1\,2\,3\,4\,5\,6)$ e $r = (2\,6)(3\,5)$. $D_6$ possui algum subgrupo normal de índice 4? Justifique sua resposta!

2. Seja $X = \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Assuma que $G = \{\varphi : X \longrightarrow X \mid \varphi \text{ é uma bijeção }\}$ é um grupo com a composta de funções. Considere $f, g \in G$ indicadas a seguir:

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} g: & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x} \end{array}$$

   (a) (0,5) Determine a ordem de $f$ e $g$, respectivamente.
   (b) (0,5) O subgrupo $H = \langle f, g \rangle \leq G$ é abeliano? Justifique sua resposta!
   (c) (0,5) O subgrupo $H = \langle f, g \rangle \leq G$ é isomorfo a $S_3$? Justifique sua resposta!

3. (1,5) Seja $G$ um grupo finito de ordem 351. Mostre que $G$ possui um subgrupo normal de ordem 13 ou um subgrupo normal de ordem 27.

4. Considere $\mathrm{f}(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ e $\mathfrak{m} = (2x - 1)$ o ideal gerado por $2x - 1$ no anel $\mathbb{Q}[x]$.
   (a) (0,5) $\mathrm{f}(x) \in \mathfrak{m}$? Justifique sua resposta!
   (b) (0,5) Mostre que $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal do anel $\mathbb{Q}[x]$.
   (c) (1,0) Determine todos os ideais primos do anel quociente $\dfrac{\mathbb{Q}[x]}{I}$ sendo $I = (\mathrm{f}(x))$.

5. Com as operações usuais de adição e multiplicação de matrizes, o conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} z & q \\ 0 & z \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Q} \right\}$$

   é um anel comutativo com unidade. Considere o conjunto $J = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid q \in \mathbb{Q} \right\}$.
   (a) (0,5) Mostre que $J$ é um ideal primo do anel $\mathcal{A}$.
   (b) (1,0) $J$ é finitamente gerado? Justifique sua resposta!

6. Sejam $A$ um anel comutativo com unidade e $I$ um ideal de $A$.

   (a) (1,0) Se $A$ for noetheriano, então mostre que o anel quociente $\dfrac{A}{I}$ é noetheriano.

   (b) (0,5) $A = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ é uma anel* noetheriano? Justifique sua resposta!

*com as operações usuais de adição e multiplicação de números complexos é um anel comutativo com unidade.

Código de Identificação do Candidato:

# Geometria Diferencial

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2022.2

1. Seja $\alpha(t) = (acos(t/c), a\sin(t/c), bt/c)$, $t \in \mathbb{R}$ e $c^2 = a^2 + b^2$.

   (a) (1,0) Mostre que $\alpha$ está parametrizada pelo comprimento de arco.

   (b) (1,0) Determine a curvatura de $\alpha$.

2. (i) (1,0) Mostre que um ponto $p \in S$ é umbílico se e somente se $H^2(p) = K(p)$.

   (ii) (1,0) Mostre que as únicas superfícies conexas totalmente umbílicas são parte de uma esfera e ou de plano.

   (iii) (0,5) Encontre um exemplo de superfície com um ponto umbílico que não é totalmente umbílica.

3. Calcule a curvatura Gaussiana das seguintes superfícies:

   (i) (0,5) Esfera

   (ii) (0,5) Hyperplano

   (iii) (0,5) Cilindro

4. Responda:

   (i) (1,0) Dada uma superfície compacta orientável $S$ homeomorfa a esfera, mostre que

   $$\int_S H^2 dA \geq 4\pi.$$

   Além disso, a igualdade é válida se e só se $S$ é uma esfera.

   (ii) (1,0) Seja $T$ um triângulo geodésico em uma superfície $S$. Mostre que

   $$\int_T K dA + \pi = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i,$$

   onde $\varphi_i$ são os ângulos internos de $T$.

5. (i) (1,0) Mostre que se a curvatura média é zero em um ponto não-planar, então esse ponto tem duas direções assintóticas ortogonais. Encontre um exemplo de uma superfície que possui um ponto com curvatura média zero mas que é não planar.

   (ii) (1,0) Mostre que se uma geodésica(que não seja uma reta) é uma curva plana, então ela é uma linha de curvatura. Encontre um exemplo de uma curva que é linha de curvatura, plana e não é geodésica.