Código de Identificação do Candidato:

Álgebra Linear

Prova do Processo Seletivo 2022.1

1. Seja V um espaço vetorial real de dimensão 3 e considere duas bases ordenadas $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$ de V, as quais estão relacionadas pelas seguintes igualdades:

$$u_1 = w_3 - 5w_1, \quad u_2 = w_2 - w_1 + 5w_3 \;\text{ e }\; u_3 = 2w_2 + w_3 + 25w_1.$$

   (a) (1,0) Determine a matriz mudança de base da base α para a base β.

   (b) (1,0) Se $u = -2w_2 - 10w_3 - w_1$, determine $[u]_\alpha$ (coordenadas do vetor u com relação à base α).

2. Seja $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (2x, 2z, y + w, 3w)$$

   (a) (0,5) Mostre que T é linear;

   (b) (0,5) Ache a matriz que representa T com relação as bases canônicas de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^4$.

   (c) (1,0) T é inversível? Caso afirmativo, determine T^{-1}.

3. a) (0,75) Seja $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se $\dim Im(T) = m$, então T tem no máximo $m + 1$ autovalores.

   b) (1,25) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Se um operador linear $T : V \to V$ possui n autovalores distintos, então T é diagonalizável? (justifique sua resposta!)

4. Seja $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e considere o operador $T : V \to V$ definido por

$$T(f)(t) = \int_0^t f(x)dx$$

   a) (0,5) Prove que T é um operador linear;

   b) (1,0) Mostre que T não possui nenhum autovalor .

5. (1,5) Seja $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ (espaço das matrizes reais de ordem 5) uma matriz cujo polinômio característico é $p(x) = (x-3)^3(x-2)^2$. Determine as possíveis formas de Jordan da matriz A.

6. (1,0) Considere o espaço $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dos polinômios reais de grau menor ou igual a 3, com o produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

   Seja $W = [5, 1 + t]$ o subespaço gerado pelos polinômios $p_1(t) = 5$ e $p_2(t) = 1 + t$. Ache uma base ortonormal para W.

Código de Identificação do Candidato:

Análise na Reta

Prova do Processo Seletivo 2022.1

Lista de Problemas

1. (2,0) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não-vazios e limitados superiormente. Mostre que:

   a) Existe uma sequência em A que converge para o $\sup A$.

   b) Se $A \subset B$, então $\sup A \leq \sup B$.

2. (1,5) Se um número $a \in \mathbb{R}$ não é limite de uma sequência limitada (x_n), mostre que alguma subsequência de (x_n) converge para um limite $b \neq a$.

3. (1,5) Prove o *critério da comparação para séries*: Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries de números reais não negativos e existe $k > 0$ tal que $a_n < kb_n$ para todo n suficientemente grande, então $\sum a_n$ converge se $\sum b_n$ é convergente, e $\sum b_n$ diverge se $\sum a_n$ é divergente.

4. (1,0) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas e $X \subset \mathbb{R}$. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, mostre que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in \overline{X}$, onde $\overline{X}$ é o fecho de X.

5. (2,0) Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *lipschitziana em X* quando existe $k > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ para todos $x, y \in X$. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável no aberto I com derivada limitada, mostre que f é lipschitziana em I.

6. (2,0) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função integrável. Prove que a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

   é lipschitziana (ver def. na questão anterior) em $[a, b]$.