

# UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN-Coordenação de Pós-Graduação em Matemática

## PLANO DE TRABALHO E PROJETO DE DISSERTAÇÃO

### I DADOS.

- **Título:** Problemas Elípticos com Condições Locais de Super-Linearidade e Sub-Linearidade.
- **Área:** Análise (Equações Diferenciais Parciais)
- **Candidato:** Paulo Xavier
- **Orientador:** Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros
- **Coo-Orientador:** Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
- **Período:** Março de 2003 á dezembro de 2004

### II PRIMEIRA PARTE (Disciplinas Básicas)

#### PRIMEIRO PERÍODO DE 2003.

Nesta primeira fase do plano de trabalho, o candidato cursará as disciplinas obrigatórias e as disciplinas eletivas do curso, objetivando adquirir conhecimentos gerais nas áreas de concentração do Curso de Mestrado em Matemática, como também na área específica de sua dissertação de Mestrado. Estamos prevendo dois semestres para esta fase do plano.

#### 0.1 Análise Real:

Revisão de Álgebra Linear. Espaços Vetoriais Normados. Revisão de Topologia. Normas Equivalentes. Espaços Compactos. Espaços Conexos. Diferenciação. Funções Diferenciáveis. Regra da Cadeia. Teorema da Aplicação Inversa. Teorema da Função Implícita. Integrais Múltiplas. Critérios de Integração. Conjuntos de Conteúdo Nulo. Conjuntos de Medida Nula. Integrais Impróprias. Partições da Unidade. Teorema de Mudança de Variáveis. Superfícies

Euclidianas. O volume de Superfícies Parametrizadas. A Fronteira de uma Superfície. Integração sobre Superfícies. Formas Diferenciais. Teoremas de Stokes.

**Referências:**

- J. R. Munkres, Analysis on Manifolds, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- E. L. Lima, Curso de Análise Vol. 2. Projeto Euclides, 1981.
- M. Spivak, Calculus on Manifolds, W. A. Benjamin, Inc., 1965.
- H. W. Fleming, Functions of Several Variables, New York, 1977.

**PROF.: EVERALDO SOUTO DE MEDEIROS**

## **0.2 Estruturas Algébricas:**

Grupos. Homomorfismos de Grupos. Teorema dos Homomorfismos. Teorema de Sylow. Grupos Solúveis. Grupos Abelianos Finitamente Gerados. Anéis. Homomorfismos de Anéis. Domínios Fatoriais. Domínios Euclidianos. Anéis de Polinômios.

**Referências:**

- Dean, R. A., Elements of Abstract Algebra.
- Gonçalves, A., Introdução à Álgebra.
- Garcia, A. e Lequain, Y., Álgebra: Um Curso de Introdução.
- Hesteyn, I. N., Topics in Algebra.

**PROF.: FERNANDO XAVIER**

## **SEGUNDO PERÍODO DE 2003.**

## **0.3 Geometria Diferencial:**

Curvas Planas. Desigualdade Isoperimétrica. Curvas no Espaço. Curvatura e Torção. Triado de Frenet. Teorema de Existência e Unicidade de Curvas. Superfícies. Plano Tangente. Primeira Forma Fundamental. Área. A Aplicação Normal de Gauss. Curvatura Média. Linhas de Curvatura. Superfícies Mínicas. Derivada Covariante. , O Teorema Egregium de Gauss. Curvatura Geodésica. Cálculo das Geodésicas. A Aplicação Exponencial. O Lema de Gauss. O Teorema de Gauss-Bonnet.

**PROF.: PEDRO HINOJOSA**

**Referências:**

- M. P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces.
- B. O'Neill, Elementary Differential Geometry.

**0.4 Medida e Integração:**

Medida e Integração de Lebesgue no  $R^n$  ; Lema de Fatou; Teorema da convergência monótona; Teorema da convergência dominada; Espaços  $L^p$  . O espaço  $L^2$ . Teorema de Riesz-Fischer; Bases; Funções absolutamente contínuas; Diferenciação em  $R$ ; Dualidade entre os espaços  $L^p$ .

**PROF.: EVERALDO SOUTO DE MEDEIROS**

**Referências:**

- Halmos, P., "Measure Theory";
- Royden, H., "Real Analysis";
- Rudin, W., "Real and Complex Analysis" McGraw-Hill, New York, 1966.

**0.5 Análise Funcional:**

Introdução à Análise Funcional em Espaços Vetoriais Topológicos; Espaços de Banach; Teoremas de Hahn-Banach; Categoria e o Teorema de Baire. O Teorema de Banach-Steinhaus; Teorema da Aplicação Aberta e Teorema do Gráfico Fechado. Topologias *fraca* e *fraca\**; Teorema de Alaoglu-Banach; Espaços Reflexivos; Espaços de Hilbert; Operadores Adjuntos; Operadores Compactos; O Teorema Espectral para Operadores Auto-Adjuntos Compactos.

**PROF.: JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó**

**Referências:**

- Bachman, G. and Narici, L., "Functional Analysis";
- Brezis, H., "Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications" Masson Paris, 1987;
- Kolmogorov, S. N. and Fomin, S. V., "Introductory Real Analysis".

### **III SEGUNDA PARTE (Disciplinas Específicas)**

#### **PRIMEIRO PERÍODO DE 2004**

##### **0.6 Teoria do Grau Topológico:**

O Teorema de Sard; Definição do grau de Brouwer - Caso Regular; Extensão da Definição, Propriedades Fundamentais e conseqüências das propriedades do grau de Brouwer; Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e Formas Equivalentes; Definição e Propriedades do Índice; O Teorema de Borsuk e Aplicações; Definição e Propriedades do Gênero; Categoria de Ljusternik-Schnirelman; Definição do Grau de Leray-Schauder; Propriedades Fundamentais e suas conseqüências; Definição e Cálculo do Índice por Linearização; O Teorema de Borsuk em Dimensão Infinita; Teoremas de Ponto Fixo; Aplicações do Grau Topológico à resoluções de Equações Diferenciais Parciais. Bifurcação.

##### **Referências:**

- Berestycki, H., "Methodes Topologiques et Problems aux Limites non Lineares" These de Docteur de 3ème Cycle, L'Universite de Paris VI, 1975;
- Deimiling, K., "Nonlinear Functional Analysis" Spriger-Verlag, 1980;
- Nirenberg, L., "Topics in Nonlinear Functional Analysis" Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1974;
- Zeidler, E., "Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: I - Fixed-Point Theorems" Springer-Verlag.

**PROF.: JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó**

##### **0.7 Teoria dos Pontos Críticos:**

Espaços de Sobolev: Definições e Propriedades Básicas, Aproximação por funções diferenciáveis, Teoremas de extensões, Teoremas de Imersões, Espaços Duais, Espaços de Sobolev Fracionários, Teoria do Traço. Formulação Variacional de Alguns Problemas Elípticos: Alguns Problemas Variacionais Abstratos, Exemplos de Alguns Problemas Elípticos, Teorema do Passo da Mantanha, Técnicas de Minimização, Regularidade de Soluções Fracas, Princípio do Máximo, Alguns Problemas de Autovalores.

**PROF.: JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó**

**Referências:**

-Rabinowitz, Paul H., Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65.

-Struwe, M., Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Third edition.

-H. Brezis, Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications, Masson, Paris, 1993.

### III OBJETIVO FINAL (Dissertação)

#### SEGUNDO PERÍODO DE 2004

O objetivo final deste projeto é o estudo da existência, não-existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos não lineares da forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{in } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega. \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$  é um domínio limitado.

Após os trabalhos pioneiros de, Lions-Djairo-Nussbaum[5] e Ambrosseti-Benci-Cerami[4], vários pesquisadores tem estudado o problema (1) sobre vários tipos de hipóteses na não linearidade  $f(x, u)$ . Aqui, vamos usar as técnicas desenvolvidas no trabalho recente de Djairo-Gossez-Ubilla[1] para estudar o problema (1) sob algum tipo de condição local análoga à condição clássica de sublinearidade na origem e superlinearidade no infinito. Vamos estudar o problema sublinear clássico onde essencialmente nenhuma condição de crescimento é assumida no infinito.

Neste trabalho, pretendemos também aplicar várias técnicas para estudar este problema. Na primeira parte, vamos usar técnicas variacionais, mais especificamente, o teorema do Passo da montanha sem a condição de Palais-Smale, onde aqui seguiremos as idéias de [6]. Na segunda parte deste trabalho, vamos usar argumento de sub-super solução e, nesta parte, seguiremos as idéias de [1]. Finalmente, na terceira parte vamos analisar algum tipo de não-linearidade com sinal indefinido.

## Referências

- [1] De Figueiredo, D. G.; Gossez, J. P.; Ubilla, P., —Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems. *J. Funct. Anal.* 199 (2003), no. 2, 452–467.
- [2] Marcos do Ó, J.; Ubilla, P. *Multiple solutions for a class of quasilinear elliptic problems.* *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) 46 (2003), no. 1, 159–168.
- [3] de Figueiredo, D. G.; Yang, J. *On a semilinear elliptic problem without (PS) condition.* *J. Differential Equations* 187 (2003), no. 2, 412–428.
- [4] Ambrosetti, A.; Brezis, H. ; Cerami, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems.* *J. Funct. Anal.* 122 (1994), no. 2, 519–543.
- [5] de Figueiredo, D. G.; Lions, P. L.; Nussbaum, R. D. *Estimations a priori pour les solutions positives de problèmes elliptiques superlinéaires.* (French) *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 290 (1980), no. 5, A217–A220.
- [6] de Figueiredo, D. G.; Solimini, S. *A variational approach to superlinear elliptic problems.* *Comm. Partial Differential Equations* 9 (1984), no. 7, 699–717.

ORIENTADOR:

---

Everaldo Souto de Medeiros

COORIENTADOR:

---

João Marcos Bezerra do Ó

João Pessoa, 20 de setembro de 2003