

# UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN-Coordenação de Pós-Graduação em Matemática

## PLANO DE TRABALHO E PROJETO DE DISSERTAÇÃO

### I DADOS.

- **Título:** Equações Elípticas com Não Linearidades com Sinal Indefinido
- **Área:** Análise (Equações Diferenciais Parciais)
- **Aluno:** Anselmo Ribeiro Lopes
- **Orientador:** Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
- **Co-Orientador:** Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros
  
- **Período:** Março de 2003 à dezembro de 2004

### II PRIMEIRA PARTE (Disciplinas Básicas)

#### PRIMEIRO PERÍODO DE 2003.

Nesta primeira fase do plano de trabalho, o candidato cursará as disciplinas obrigatórias e as disciplinas eletivas do curso, objetivando adquirir conhecimentos gerais nas áreas de concentração do Curso de Mestrado em Matemática, como também na área específica de sua dissertação de Mestrado. Estamos prevendo dois semestres para esta fase do plano.

#### 0.1 Análise Real:

Revisão de Álgebra Linear. Espaços Vetoriais Normados. Revisão de Topologia. Normas Equivalentes. Espaços Compactos. Espaços Conexos. Diferenciação. Funções Diferenciáveis. Regra da Cadeia. Teorema da Aplicação Inversa. Teorema da Função Implícita. Integrais Múltiplas. Critérios de Integração. Conjuntos de Conteúdo Nulo. Conjuntos de Medida Nula. Integrais Impróprias. Partições

da Unidade. Teorema de Mudança de Variáveis. Superfícies Euclidianas. O volume de Superfícies Parametrizadas. A Fronteira de uma Superfície. Integração sobre Superfícies. Formas Diferenciais. Teoremas de Stokes.

**Referências:**

- J. R. Munkres, Analysis on Manifolds, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- E. L. Lima, Curso de Análise Vol. 2. Projeto Euclides, 1981.
- M. Spivak, Calculus on Manifolds, W. A. Benjamin, Inc., 1965.
- H. W. Fleming, Functions of Several Variables, New York, 1977.

**PROF.: EVERALDO SOUTO DE MEDEIROS**

## **0.2 Estruturas Algébricas:**

Grupos. Homomorfismos de Grupos. Teorema dos Homomorfismos. Teorema de Sylow. Grupos Solúveis. Grupos Abelianos Finitamente Gerados. Anéis. Homomorfismos de Anéis. Domínios Fatoriais. Domínios Euclidianos. Anéis de Polinômios.

**Referências:**

- Dean, R. A., Elements of Abstract Algebra.
- Gonçalves, A., Introdução à Álgebra.
- Garcia, A. e Lequain, Y., Álgebra: Um Curso de Introdução.
- Hesteyn, I. N., Topics in Algebra.

**PROF.: FERNANDO XAVIER**

## **SEGUNDO PERÍODO DE 2003.**

## **0.3 Geometria Diferencial:**

Curvas Planas. Desigualdade Isoperimétrica. Curvas no Espaço. Curvatura e Torção. Triângulo de Frenet. Teorema de Existência e Unicidade de Curvas. Superfícies. Plano Tangente. Primeira Forma Fundamental. Área. A Aplicação Normal de Gauss. Curvatura Média. Linhas de Curvatura. Superfícies Mínicas. Derivada Covariante. , O Teorema Egregium de Gauss. Curvatura Geodésica. Cálculo das Geodésicas. A Aplicação Exponencial. O Lema de Gauss. O Teorema

de Gauss-Bonnet.

**PROF.: PEDRO HINOJOSA**

**Referências:**

- M. P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces.
- B. O'Neill, Elementary Differential Geometry.

#### **0.4 Medida e Integração:**

Medida e Integração de Lebesgue no  $R^n$  ; Lema de Fatou; Teorema da convergência monótona; Teorema da convergência dominada; Espaços  $L^p$  . O espaço  $L^2$ . Teorema de Riesz-Fischer; Bases; Funções absolutamente contínuas; Diferenciação em  $R$ ; Dualidade entre os espaços  $L^p$ .

**PROF.: EVERALDO SOUTO DE MEDEIROS**

**Referências:**

- Halmos, P., "Measure Theory";
- Royden, H., "Real Analysis";
- Rudin, W., "Real and Complex Analysis" McGraw-Hill, New York, 1966.

#### **0.5 Análise Funcional:**

Introdução à Análise Funcional em Espaços Vetoriais Topológicos; Espaços de Banach; Teoremas de Hahn-Banach; Categoria e o Teorema de Baire. O Teorema de Banach-Steinhaus; Teorema da Aplicação Aberta e Teorema do Gráfico Fechado. Topologias *fraca* e *fraca\**; Teorema de Alaoglu-Banach; Espaços Reflexivos; Espaços de Hilbert; Operadores Adjuntos; Operadores Compactos; O Teorema Espectral para Operadores Auto-Adjuntos Compactos.

**PROF.: JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó**

**Referências:**

- Bachman, G. and Narici, L., "Functional Analysis";
- Brezis, H., "Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications" Masson Paris, 1987;
- Kolmogorov, S. N. and Fomin, S. V., "Introductory Real Analysis".

### **III SEGUNDA PARTE (Disciplinas Específicas)**

#### **PRIMEIRO PERÍODO DE 2004**

##### **0.6 Teoria do Grau Topológico:**

O Teorema de Sard; Definição do grau de Brouwer - Caso Regular; Extensão da Definição, Propriedades Fundamentais e conseqüências das propriedades do grau de Brouwer; Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e Formas Equivalentes; Definição e Propriedades do Índice; O Teorema de Borsuk e Aplicações; Definição e Propriedades do Gênero; Categoria de Ljusternik-Schnirelman; Definição do Grau de Leray-Schauder; Propriedades Fundamentais e suas conseqüências; Definição e Cálculo do Índice por Linearização; O Teorema de Borsuk em Dimensão Infinita; Teoremas de Ponto Fixo; Aplicações do Grau Topológico à resoluções de Equações Diferenciais Parciais. Bifurcação.

##### **Referências:**

- Berestycki, H., "Methodes Topologiques et Problems aux Limites non Lineares" These de Docteur de 3ème Cycle, L'Universite de Paris VI, 1975;
- Deimiling, K., "Nonlinear Functional Analysis" Spriger-Verlag, 1980;
- Nirenberg, L., "Topics in Nonlinear Functional Analysis" Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1974;
- Zeidler, E., "Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: I - Fixed-Point Theorems" Springer-Verlag.

**PROF.: JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó**

##### **0.7 Teoria dos Pontos Críticos:**

Espaços de Sobolev: Definições e Propriedades Básicas, Aproximação por funções diferenciáveis, Teoremas de extensões, Teoremas de Imersões, Espaços Duais, Espaços de Sobolev Fracionários, Teoria do Traço. Formulação Variacional de Alguns Problemas Elípticos: Alguns Problemas Variacionais Abstratos, Exemplos de Alguns Problemas Elípticos, Teorema do Passo da Mantanha, Técnicas de Minimização, Regularidade de Soluções Fracas, Princípio do Máximo, Alguns Problemas de Autovalores.

**PROF.: JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó**

**Referências:**

- Rabinowitz, Paul H., Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65.
- Struwe, M., Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Third edition.
- H. Brezis, Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications, Masson, Paris, 1993.

### III OBJETIVO FINAL (Dissertação)

#### SEGUNDO PERÍODO DE 2004

O objetivo final deste projeto é o estudo do problema de Dirichlet para Equações Elípticas Semilineares com Não-Linearidade com sinal Indefinido. Neste trabalho, vamos estudar equações elípticas semilineares cujos termos não-lineares têm a forma  $W(x)f(u)$  onde  $W$  muda de sinal. Estudaremos também resultados de existência de soluções positivas e resultados de multiplicidade. Analisaremos a influência da parte negativa de  $W$ . Veremos que esta impõe uma condição necessária no termo homogêneo  $f$  para que o problema tenha solução positiva.

O método que vamos usar é inspirado pelas técnicas introduzidas por Alama-Tarantelo em [4]. Após este trabalho, vários pesquisadores estudaram problemas com não-linearidade com sinal indefinido. Usando técnicas variacionais, mais especificamente, via resultados de simetria baseado no artigo [2], vamos também obter resultados de multiplicidade.

A idéia principal é separar a parte positiva e negativa de  $W$  e introduzir uma família a um parâmetro de equações. Na primeira parte deste trabalho, vamos assumir que a não-linearidade  $f$  satisfaz alguma condição de crescimento na origem e no infinito. Usando técnicas variacionais, vamos obter resultados de existência. Na segunda parte, vamos usar o método de Perron, mais especificamente, o método de sub-solução e super-solução para resultados de existência impondo hipóteses mais simples na não linearidade  $f$ . Na terceira parte, seguindo o artigo de Benci-Rabinowith [1], vamos usar a Teoria de Bifurcação para obter um ramo de solução positivas.

## Referências

- [1] Benci, Vieri; Rabinowitz, Paul H. *Critical point theorems for indefinite functionals*. Invent. Math. 52 (1979), no. 3, 241–273.
- [2] Benci, Vieri *On critical point theory for indefinite functionals in the presence of symmetries*. Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), no. 2, 533–572.
- [3] Benci, Vieri; Fortunato, Donato *The dual method in critical point theory. Multiplicity results for indefinite functionals*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 132 (1982), 215–242.
- [4] Alama, Stanley; Tarantello, Gabriella, *Elliptic problems with nonlinearities indefinite in sign*. J. Funct. Anal. 141 (1996), no. 1, 159–215.
- [5] Tarantello, Gabriella *Multiplicity results for an inhomogeneous Neumann problem with critical exponent*. Manuscripta Math. 81 (1993), no. 1-2, 57–78.
- [6] Alama, Stanley; Tarantello, Gabriella *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*. Calc. Var. Partial Differential Equations 1 (1993), no. 4, 439–475.

ORIENTADOR:

---

João Marcos Bezerra do Ó

COORIENTADOR:

---

Everaldo Souto de Medeiros

João Pessoa, 20 de setembro de 2003